会計理論分析2019

（旧：情報の経済学と会計学）

トピック#2 利益マネジメント

準備(1)：確率・統計

2019年5月14日

担当：椎葉　淳

- 椎葉淳･高尾裕二･上枝正幸(2010)『会計ディスクロージャーの経済分析』同文舘出版. 数学付録.

条件付き確率と乗法定理

何かの事象A_2が起こったときに，対象としている事象A_1がどのような確率で起きるのかを考えることがある。この確率を**条件付き確率**(conditional probability)といい，$\Pr(A_1 \mid A_2)$で表す。条件付き確率は次式で与えられる。

$$\Pr(A_1 \mid A_2) = \frac{\Pr(A_1 \cap A_2)}{\Pr(A_2)} \tag{B.2}$$

この式の右辺の分子はA_1とA_2の同時確率である。また，分母はA_1が起こるか否かにかかわらずA_2の起こる確率を意味しており，これをA_2の**周辺確率**(marginal probability)と呼ぶ。条件付き確率の定義式を変形した次式は，**乗法定理**(multiplication theorem)と呼ばれる。

$$\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1 \mid A_2) \times \Pr(A_2) \tag{B.3}$$

条件付き確率と乗法定理：練習問題

企業はグッド・タイプ(G)，ノーマル・タイプ(N)，バッド・タイプ(B)のいずれかである。また，企業は業績が黒字(X)になる確率と赤字(Y)になる確率がそれぞれ1/2である。また，グッド・タイプ(G)であり赤字(Y)になる確率は1/10である。いま，ある企業の今期の業績は赤字(Y)だった。この企業がグッド・タイプである確率を求めよ。

$$\Pr(X) = \Pr(Y) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(G \cap Y) = \frac{1}{10}$$

条件付き確率と乗法定理：練習問題

［解答］

求めるのは条件付き確率$\Pr(G \mid Y)$である。

$$
\begin{aligned}
\Pr(G \mid Y) &= \frac{\Pr(G \cap Y)}{\Pr(Y)} \\
&= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

全確率の定理

事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに排反で，その和事象は標本空間になるとする。つまり，標本空間を S で表すとき，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$ とする。このとき，任意の事象 B に対して，次の関係が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr(B \mid A_1)\Pr(A_1) + \Pr(B \mid A_2)\Pr(A_2) + \cdots + \Pr(B \mid A_n)\Pr(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Pr(B \mid A_k)\Pr(A_k) \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}
$$

この関係は**全確率の定理** (theorem of total probability) と呼ばれる。全確率の定理は次の二式が成立することから導出できる。

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \qquad \text{(B.13)}$$

$$\Pr(B) = \Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) + \cdots + \Pr(A_n \cap B) \qquad \text{(B.14)}$$

右辺の各項に (B.3) 式の乗法定理を適用すると，(B.12) 式の全確率の定理が得られる。

ベイズの定理

次式は，**ベイズの定理** (Bayes' theorem) または**ベイズ・ルール** (Bayes' rule) と呼ばれる。なお，$i = 1, 2, \ldots, n$ である。

$$\Pr(A_i \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \Pr(B \mid A_k)\Pr(A_k)} \tag{B.15}$$

ベイズの定理は次のように示すことができる。まず，条件付き確率の定義より，次式が成立する。

$$\Pr(A_i \mid B) = \frac{\Pr(A_i \cap B)}{\Pr(B)} \tag{B.16}$$

(B.16) 式の分母に (B.12) 式の全確率の定理を，分子に (B.3) 式の乗法定理を適用すれば，(B.15) 式のベイズの定理が得られる。ベイズの定理は，初めにわかっていた条件付き確率 $\Pr(B \mid A_i)$ から，これとは逆の条件付き確率 $\Pr(A_i \mid B)$ を求める定理といえる。なお，$\Pr(A_i)$ を**事前確率** (prior probability)，$\Pr(A_i \mid B)$ を**事後確率** (posterior probability) と呼ぶ。

ベイズの定理：練習問題

2018年度課題#1(1)

企業はグッド・タイプ(G)，ノーマル・タイプ(N)，バッド・タイプ(B)のいずれかであり，それぞれの確率は1/3である。黒字(X)になる確率は，グッド・タイプは70%，ノーマル・タイプは50%，バッド・タイプは30%である。いま，ある企業の今期の業績は赤字(Y)だった。この企業がグッド・タイプである確率を求めよ。

$$\Pr(G) = \Pr(N) = \Pr(B) = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(X \mid G) = 0.7,\ \Pr(X \mid N) = 0.5,\ \Pr(X \mid B) = 0.3$$

$$\Pr(Y \mid G) = 0.3,\ \Pr(Y \mid N) = 0.5,\ \Pr(Y \mid B) = 0.7$$

ベイズの定理：練習問題

2018年度課題#1(1)

［解答］

求めるのはPr(G | Y)である。ベイズの定理より，次のように計算すればよい。

$$
\begin{aligned}
\Pr(G \mid Y) &= \frac{\Pr(Y \mid G)\Pr(G)}{\Pr(Y \mid G)\Pr(G) + \Pr(Y \mid N)\Pr(N) + \Pr(Y \mid B)\Pr(B)} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times 0.3}{\frac{1}{3} \times 0.3 + \frac{1}{3} \times 0.5 + \frac{1}{3} \times 0.7} \\
&= \frac{1}{5} \qquad \left(= \frac{3}{15} < \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \Pr(G) \right)
\end{aligned}
$$

確率分布：連続確率変数のケース

確率変数のとりうる値が連続的である連続確率変数の場合において，密度関数と分布関数を定義する。まず，連続確率変数の**分布関数** (distribution function) $F(x)$ を $F(x) = \Pr(X \leq x)$ と定義する。この分布関数は次の三つの性質を持つ。

- $0 \leq F(x) \leq 1$ (B.22)
- $F(x)$ は単調非減少関数 (B.23)
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ (B.24)

連続確率変数の場合，特定の 1 点をとる確率はゼロとし，確率は区間に対して定義される。分布関数を用いると，確率変数 X が区間 $[a, b]$ に入る確率を，次のように表すことができる。

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a) = F(b) - F(a) \tag{B.25}$$

確率分布：連続確率変数のケース

また，次の関数 $f(x)$ は**確率密度関数** (probability density function) あるいは単に**密度関数** (density function) と呼ばれる。密度関数 $f(x)$ は分布関数の微分として，次のように定義される。

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{B.26}$$

逆に分布関数は，次のように密度関数を積分したものになる。

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)\, dw \tag{B.27}$$

確率分布：連続確率変数のケース

密度関数は次の二つの性質を持つ。

- $f(x) \geq 0 \quad \text{for any } x$ (B.28)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (B.29)

密度関数を用いると，確率変数 X が区間 $[a, b]$ に入る確率を次のように表すことができる。

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{B.30}$$

期待値

期待値 (expectation) は E[X] で表し，X が離散確率変数のとき，次のように定義する。

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \Pr(x_i) \tag{B.34}$$

また，X が連続確率変数のとき，次のように定義する。

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \tag{B.35}$$

X の期待値は，μ_X と表されることもある。

分散

分散 (variance) は $\mathrm{Var}(X)$ で表し，X が離散確率変数，または連続確率変数のとき，それぞれ次のように定義する。

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 \Pr(x_i) \tag{B.38}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\, dx \tag{B.39}$$

あるいは，$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mu_X)^2]$ と定義しても同じである。X の分散を σ_X^2 と表すこともある。$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ は X の**標準偏差** (standard deviation) と呼ばれる。確率変数 X の分散と期待値には，次の関係が成立する。

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \tag{B.40}$$

つまり，確率変数 X の分散は，確率変数 X の 2 乗の期待値から確率変数 X の期待値の 2 乗を引いたものである。

期待値についての計算ルール

期待値についての有用な公式として次のようなものがある。なお，X, Y は確率変数，a, b, c は定数とする。

$$\mathrm{E}[aX] = a\mathrm{E}[X] \tag{B.44}$$

$$\mathrm{E}[aX \pm bY] = a\mathrm{E}[X] \pm b\mathrm{E}[Y] \tag{B.45}$$

$$\mathrm{E}[c] = c \tag{B.46}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X]] = \mathrm{E}[X] \tag{B.47}$$

分散についての計算ルール

分散についての有用な公式として次のようなものがある。なお，X, Y は確率変数，a, b, c は定数とする。

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X) \tag{B.48}$$

$$\mathrm{Var}(aX \pm bY) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y) \pm 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y) \tag{B.49}$$

$$\mathrm{Var}(c) = 0 \tag{B.50}$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{Var}(X)) = 0 \tag{B.51}$$

共分散

確率変数 X と Y の**共分散** (covariance) は $\mathrm{Cov}(X, Y)$ で表し，次のように定義する。

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] \tag{B.79}$$

次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] \\ &= \mathrm{E}[XY - X\mathrm{E}[Y] - Y\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\end{aligned} \tag{B.80}$$

つまり，X と Y の共分散は，X と Y の積の期待値からそれぞれの期待値の積を引いたものである。なお X と Y の共分散は，σ_{XY} と表されることもある。

相関係数

確率変数XとYの**相関係数**(correlation coefficient)はρ_{XY}で表し，次のように定義する。

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \tag{B.82}$$

$\rho_{XY} > 0$のとき正の相関がある，$\rho_{XY} < 0$のとき負の相関がある，$\rho_{XY} = 0$のとき**無相関**(uncorrelated)であるという。相関係数ρは$-1 \leq \rho \leq 1$を満たす。なお，二つの確率変数が独立ならば無相関であるが，逆は一般には成り立たない。

共分散についての計算ルール

共分散の計算ルールについて，有用な公式をまとめておく。なお，X, Y, Z は確率変数，a, b, c は定数とする。

$$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y) \tag{B.83}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y \pm Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) \pm \mathrm{Cov}(X, Z) \tag{B.84}$$

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X) \tag{B.85}$$

$$\mathrm{Cov}(X, c) = 0 \tag{B.86}$$

これらの計算ルールを用いて，相関係数は標準化した二つの確率変数の共分散に等しいことを示すことができる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) &= \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\mathrm{Cov}(X-\mu_X, Y-\mu_Y) \\
&= \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho_{XY}
\end{aligned}$$

条件付き確率

事象に対して定義した条件付き確率の考え方を離散確率変数に対して適用した条件付き確率関数(conditional probability function)を定義する。同時確率関数を$\Pr(x_i, y_j)$，周辺確率関数を$\Pr(x_i)$および$\Pr(y_j)$とするとき，$Y = y_j$が与えられたときの離散確率変数Xの条件付き確率関数を$\Pr(x_i \mid y_j)$で表し，次のように定義する。

$$\Pr(x_i \mid y_j) = \frac{\Pr(x_i,\ y_j)}{\Pr(y_j)} \tag{B.58}$$

また，二つの連続確率変数XとYについて，Xが与えられたときのYの条件付き密度関数(conditional density function)は$f(y \mid x)$で表し，次のように定義する。

$$f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \tag{B.71}$$

ただし，$f_X(x) > 0$とする。ここで，$f(x, y)$は同時密度関数であり，$f_X(x)$は連続確率変数Xの周辺密度関数である。

条件付き期待値

二つの離散確率変数 X と Y について，そのとりうる値を小さい順にそれぞれ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ および $y_1, y_2, \ldots, y_m$ とする。対応する確率は，それぞれ $\Pr(x_1), \Pr(x_2), \cdots, \Pr(x_n)$ および $\Pr(y_1), \Pr(y_2), \cdots, \Pr(y_m)$ と表すことができる。このとき，(B.58) 式の条件付き確率関数 $\Pr(y_j \mid x_i)$ を用いて，条件付き期待値 (conditional expectation) を次のように定義する。

$$\mathrm{E}[Y \mid X = x_i] = \sum_{j=1}^{m} y_j \Pr(y_j \mid x_i) \tag{B.87}$$

同様に，二つの連続確率変数 X と Y について，(B.71) 式の条件付き密度関数 $f(y \mid x)$ を用いて，条件付き期待値を次のように定義する。

$$\mathrm{E}[Y \mid X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y \mid x)\, dy \tag{B.88}$$

条件付き期待値

なお，$\mathrm{E}[Y \mid X = x]$ を $\mathrm{E}[Y \mid x]$ と簡潔に書くこともある。また，$X = x$ が与えられたときの Y の条件付き期待値 $\mathrm{E}[Y \mid X = x]$ は，実現した x の値によって変化するため X の関数とみることができる。このように X についての確率変数と考えるときには，$\mathrm{E}[Y \mid X]$ と表す。

条件付き期待値についての計算ルール

条件付き期待値については，次の公式が重要である。なお，X, Y, Z は確率変数，a, b, c は定数とする。

$$\mathrm{E}[aY \mid X] = a\mathrm{E}[Y \mid X] \tag{B.89}$$

$$\mathrm{E}[aY + bZ \mid X] = a\mathrm{E}[Y \mid X] + b\mathrm{E}[Z \mid X] \tag{B.90}$$

$$\mathrm{E}[X \mid X] = X \tag{B.91}$$

$$\mathrm{E}[c \mid X] = c \tag{B.92}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y \mid X]] = \mathrm{E}[Y] \tag{B.93}$$

最後の (B.93) 式は繰り返し期待値の法則(law of iterated expectation)，またはこの特徴は（英語のまま）tower property と呼ばれ，応用上よく用いられる。

正規分布

会計研究においては，より多くの含意を得るため，確率変数の分布が正規分布にしたがうケースがしばしば考察される。一般性を失うというコストはあるものの，より豊富な状況を分析することができるという大きなベネフィットがあると考えられてきたからである。この結果，会計研究において正規分布のモデルは，さまざまな応用がなされている。

確率変数 X の密度関数 $f(x)$ が次式で与えられるとき，確率変数 X は確率変数が正規分布 (normal distribution) にしたがうという。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{C.1}$$

標準正規分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，確率変数 $Z = (X - \mu)/\sigma$ は $Z \sim N(0, 1)$ となる。つまり，正規分布にしたがう確率変数 X を標準化した確率変数 Z は，期待値 0，分散 1 の正規分布にしたがう。期待値 0，分散 1 の正規分布は**標準正規分布** (standard normal distribution) と呼ばれ，標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$，密度関数を $\phi(x)$ で表す。確率変数 X と確率変数 Z の分布関数の関係および密度関数の関係は，それぞれ次のようになっている。

$$F(x) = \Phi(z) \tag{C.3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi(z) \tag{C.4}$$

二変量正規分布の密度関数

確率変数 X と Y の同時密度関数 $f(x, y)$ が次式で与えられるとき，確率変数 X と Y は**二変量正規分布** (bivariate normal distribution) にしたがうという*。

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp(Q) \tag{D.1}$$

ただし，

$$Q = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]$$

である。

*上述のルールにしたがえば ρ は ρ_{XY} と書くことになるが，文脈から明らかなので見やすさを重視して ρ としている。

条件付き期待値と条件付き分散：正規分布のケース

確率変数 X と Y が二変量正規分布にしたがっているとき，$X = x$ のもとでの Y の条件付き期待値と**条件付き分散**(conditional variance)を求める。たとえば開示されたシグナル s にもとづいて企業価値 $\tilde{v}$ の条件付き期待値 $\mathrm{E}[\tilde{v} \mid s]$ に等しい株価を設定する状況においてこれらの計算が必要となる。

条件付き期待値と条件付き分散：正規分布のケース

$X = x$ のもとでの Y の条件付き期待値 $\mathrm{E}[Y \mid X = x]$ と条件付き分散 $\mathrm{Var}(Y \mid X = x)$ は，次のようにそれぞれ2通りで表すことができる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y \mid X = x] &= \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) && \text{(D.8)} \\
&= \mathrm{E}[Y] + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)}(x - \mathrm{E}[X]) && \text{(D.9)} \\
\mathrm{Var}(Y \mid X = x) &= \sigma_Y^2(1 - \rho^2) && \text{(D.10)} \\
&= \mathrm{Var}(Y) - \frac{(\mathrm{Cov}(X, Y))^2}{\mathrm{Var}(X)} && \text{(D.11)}
\end{aligned}
$$

［枚数調整］

練習問題

2018年度課題#1(2)

ある企業の企業価値$\tilde{v}$は平均μ, 分散σ_v^2の正規分布にしたがっている．この企業価値に関して，情報$\tilde{s}=\tilde{v}+\tilde{\eta}$が開示される．ここで，$\tilde{\eta}$は企業価値$\tilde{v}$とは独立であり，平均ゼロ，分散$\sigma_\eta^2$の正規分布にしたがうものとする。いま，この情報$\tilde{s}$を観察したときの企業価値$\tilde{v}$の予測誤差を$\tilde{\varepsilon}=\tilde{v}-\mathrm{E}[\tilde{v}|\tilde{s}]$と定義する。このとき，予測誤差$\tilde{\varepsilon}$の期待値$(\mathrm{E}[\tilde{\varepsilon}])$と分散$(V(\tilde{\varepsilon}))$を求めなさい。途中の計算式も示しなさい。

練習問題

2018年度課題#1(2)

［解答］