会計理論分析2019

（旧：情報の経済学と会計学）

トピック#2 利益マネジメント

準備(2)：Kyle (1985) モデル

2019年5月14, 21日

担当：椎葉　淳

- 椎葉淳・高尾裕二・上枝正幸(2010)『会計ディスクロージャーの経済分析』同文舘出版. 第4章.
- Kyle, A. S., 1985, “Continuous Auction and Insider Trading,” *Econometrica* 53(6), pp. 1315–1335.

Kyle (1985) モデル

1. はじめに

- 会計ディスクロージャーは資本市場のインフラストラクチャーともいわれるように，会計情報は資本市場において多様かつ重大な影響を与える。
- たとえば情報開示によって投資家の行動がどのように変わるのかといった，情報開示による資本市場への影響について考察することは会計研究の課題となっている。
- ここでは，資本市場に焦点をあてた一つの代表的なモデルとして，**マーケット・マイクロストラクチャー**(market microstructure) の代表的な分析の一つと位置づけられる Kyle (1985) のモデルを取り上げる。
  - 参考文献 : O'Hara, M., 1996, *Market Microstructure Theory*, Wiley, 大村敬一・宇野淳・宗近肇訳 (1996)『マーケットマイクロストラクチャー : 株価形成・投資家行動のパズル』金融財政事情研究会）.

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- 異なる二つのタイプの投資家とマーケット・メーカーからなる市場
  - 情報トレーダー(informed trader)：私的情報に基づいて取引する
    - 情報に精通した投資家，企業内部の経営陣，インサイダー
  - ノイズ・トレーダー(noise traders)：ランダムに取引する
    - 非情報(uninformed)トレーダー，流動性(liquidity)トレーダー
  - マーケット・メーカー(market maker)：情報トレーダーとノイズ・トレーダーの注文量合計を観察して，価格を設定する。
- 市場は1回だけ開かれ，リスク資産の取引が行われる
  - Kyle (1985) は，1回限りの取引，逐次的取引，および連続的取引の3つのモデルを考察している。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- 企業価値 $\tilde{v}$ は事前には不確実であり，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布にしたがうと仮定する。
- 株式に対する情報トレーダーの取引量を x，ノイズ・トレーダーの取引量を $\tilde{u}$ とする。
- 情報トレーダーが保有する情報は，企業価値 $\tilde{v}$ そのものではなく，これと関連するがノイズを含んだシグナル $\tilde{z}$ であると仮定し，次式であらわされるとする。

$$\tilde{z} = \tilde{v} + \tilde{\varepsilon}_1 \tag{4.1}$$

  - $\tilde{\varepsilon}_1$ は平均0，分散 σ_1^2 の正規分布にしたがい，また $\tilde{v}$ および $\tilde{u}$ とは独立と仮定する。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- ノイズ・トレーダーは，意思決定主体ではなく，ランダムに取引量を決めるものとし，ノイズ・トレーダーの取引量 $\tilde{u}$ は，平均 0，分散 σ_u^2 の正規分布にしたがうものと仮定する。また，$\tilde{v}$ と $\tilde{u}$ は独立とする。
- 注：ノイズ・トレーダーについて
  - Kyle (1985) モデルでは，ノイズ・トレーダーがいなければ，マーケット・メーカーが注文量を観察することによって，情報トレーダーの私的情報を完全に推測することが可能となる。
  - しかし，現実には投資家は私的情報を持っており，その優位な立場を利用して注文をおこなっていると考えられる。
  - この状況を記述するために，マーケット・メーカーが投資家が持っている私的情報を完全に推測することを妨げるような確率的要素の存在を仮定することが必要になる。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- 情報トレーダーの取引量xとノイズ·トレーダーの取引量$\tilde{u}$の合計は，マーケット・メーカーに出される注文量合計であり，$\tilde{y}\ (= x + \tilde{u})$とあらわす。
- マーケット・メーカーは，この注文量の合計の実現値yを観察し，これにもとづいて株価pを設定する。
- モデルの流れ
  1. 情報トレーダーは企業価値vに関する情報zを私的に観察する。
  2. 情報トレーダーは私的情報zにもとづいて取引量xを決定する。同時にノイズ·トレーダーの取引量uが正規分布にしたがって決定される。
  3. マーケット・メーカーは注文量の合計$y\ (= x + u)$を観察して株価pを提示する。
  4. 企業価値vが実現する。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- このモデルでは，一方で情報トレーダーが取引量 x を決定し，他方でマーケット・メーカーが株価 p を決定する。そして，これら双方をふまえて x と p の両者が同時に決まる。
- この二つの側面について，それぞれもう少し詳しく説明する。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- 情報トレーダーの取引量決定の側面
  - 情報トレーダーは，リスク中立的であり，自己の期待利得を最大にするよう行動すると仮定する。
  - 情報トレーダーは，期末における企業価値$\tilde{v}$について私的情報zを持っており，その情報にもとづいて自身の取引量xを決定する。
  - 情報トレーダーは，株価pで取引し，最終的にvで精算することから，$(v - p)$が単位当たりの利得となる。したがって，私的情報zを入手した後の情報トレーダーの期待利得$E[\tilde{\pi} \mid z]$は，$E[(\tilde{v} - \tilde{\hat{p}})x \mid z]$とあらわされることになる。ここで$\hat{p}$は，マーケット・メーカーの設定する株価$p$に対する情報トレーダーの予想をあらわしている。
  - 情報トレーダーは，この期待利得が最大になるように取引量xを決定する。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- マーケット・メーカーの株価設定の側面
  - マーケット・メーカーは，x と u を区別して観察することはできず，注文量の合計 y $(= x + u)$ だけが観察できる。
  - マーケット・メーカーは，観察した注文量の合計 y にもとづいて，企業価値の条件付き期待値で株価 p を設定する。
  - すなわち，マーケット・メーカーは，注文量の合計 y に関する情報に条件付けられた企業価値の期待値 $\mathrm{E}[\tilde{v} \mid y = \hat{x} + u]$ に等しいように p を設定する。ここで $\hat{x}$ は，情報トレーダーの注文量 x に対するマーケット・メーカーの予想をあらわしている。
  - マーケット・メーカーの期待利得 $\mathrm{E}[\tilde{v} - p \mid y]$ はゼロとなる。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- 情報トレーダーの取引戦略 $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - 企業価値に関する私的情報 $z \in \mathbb{R}$ を見たうえで，注文量 $x \in \mathbb{R}$ を選択する。
  - $x(z) \in \mathbb{R}$ ともあらわす。
- マーケット・メーカーの株価設定ルール $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - 情報トレーダーとノイズ・トレーダーの注文量の合計 $y \in \mathbb{R}$ にもとづいて株価 $p \in \mathbb{R}$ を設定する。
  - $p(y) \in \mathbb{R}$ ともあらわす。
- 情報トレーダーの取引戦略 x に対するマーケット·メーカーの期待 $\hat{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- マーケット・メーカーの株価設定ルールに対する情報トレーダーの期待 $\hat{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- このモデルにおける均衡を次の三つの条件を満たす $(x, \hat{x}, p, \hat{p})$ と定義する。
  (i) 任意の $z \in \mathbb{R}$ について，$x(z) \in \arg\max_x \mathrm{E}[(\tilde{v} - \tilde{\hat{p}})x \mid z]$ となること。
  * 株価設定ルール $\hat{p}$ は注文量合計 y についての関数である。ここでの期待値は，情報トレーダーが注文量を選択する時点でとっており，この時点では情報トレーダーはノイズ･トレーダーの注文量を知らない。このため，$\hat{p}$ にはノイズ･トレーダーの注文量 $\tilde{u}$ についての不確実性が存在することになり，実現値ではないことを示すために $\tilde{\hat{p}}$ と表記している。

  (ii) 任意の $y \in \mathbb{R}$ について，$p(y) = \mathrm{E}[\tilde{v} \mid y = \hat{x} + u]$ となること。
  (iii) 任意の $z \in \mathbb{R}$ および $y \in \mathbb{R}$ について，$\hat{x} = x$，および $\hat{p} = p$ となること。

Kyle (1985) モデル

2. モデル

- Kyle (1985) モデルの均衡についての注意
  - ゲーム理論の分析枠組みを用いても，同じように展開できる。このとき，以下の命題4.1は，ベイジアン・ナッシュ均衡の結果と一致する。
  - この点については，たとえばBrunnermeier (2001, Section 3.2.3)，Vives (2008, Section 5.2.1) においても指摘されている。
  - ゲーム理論の枠組みでの設定および均衡の定義については，Vives (2008, Section 5.2.1) が詳しく説明している。

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- 以上の設定のもとで，情報トレーダーの取引戦略，およびマーケット・メーカーの株価決定ルールについて，次の命題4.1が得られる。

命題 4.1 次の条件を満たす $(x, \hat{x}, p, \hat{p})$ が，均衡となる。

$$x(z) = \hat{x}(z) = \beta(z - \mu) \qquad \text{for any } z$$

$$p(y) = \hat{p}(y) = \mu + \lambda y \qquad \text{for any } y$$

ただし，β および λ は，次式を満たす。

$$\beta = \frac{\sigma_u}{\sigma_z}$$

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{2\sigma_u \sigma_z}$$

Kyle (1985) モデル

3. 分析

証明

ステップ**1**：線形戦略の仮定

- 情報トレーダーは $\hat{p}(y)$ について，マーケット・メーカーは $\hat{x}(z)$ について，次のような線形戦略を仮定する。

$$\hat{p}(y) = \kappa + \lambda y \tag{4.2}$$

$$\hat{x}(z) = \alpha + \beta z \tag{4.3}$$

  - κ，λ，α，β は定数である。

- 情報トレーダーはマーケット・メーカーが (4.2) 式における κ と λ を選択すると予想し，マーケット・メーカーは情報トレーダーが (4.3) 式における α と β を選択すると予想すると仮定する。

Kyle (1985) モデル

3. 分析

ステップ2：情報トレーダーの取引戦略

注：バックワード・インダクションの考え方からすると，ステップ2とステップ3は入れ替えた方が自然だった。ただし，このモデルでは解は同じになる。

- 均衡の条件 (i) を求める。私的情報zを入手した後の情報トレーダーの期待利得$\mathrm{E}[\tilde{\pi} \mid z]$は，次のようにあらわすことができる。

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi} \mid z] = \mathrm{E}[(\tilde{v} - \tilde{\tilde{p}})x \mid z] \tag{4.4}$$

- (4.2) 式を代入し，さらに$\tilde{y} = x + \tilde{u}$を代入する。

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi} \mid z] = \mathrm{E}[(\tilde{v} - \kappa - \lambda\tilde{y})x \mid z] = \mathrm{E}[(\tilde{v} - \kappa - \lambda x - \lambda\tilde{u})x \mid z] \tag{4.5}$$

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- (4.5) 式において，確率変数は $\tilde{v}$ と $\tilde{u}$ だけであるが，$\tilde{u}$ と $\tilde{z}$ は独立であるから，z を所与としても $\tilde{u}$ の期待値はゼロである。したがって次のようになる。

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi} \mid z] = (\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z] - \kappa - \lambda x)x \tag{4.6}$$

  - $\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z]$ は，具体的にあらわすとやや複雑であること，加えて情報トレーダーによる取引戦略 x には関係しないことから，この時点ではこのままにしておく。
  - $\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z]$ は，情報トレーダーが私的情報 z によって企業価値 $\tilde{v}$ を予想していることを意味するものであり，このモデルの鍵である。

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- (4.6) 式から，情報トレーダーの期待利得最大化の 1 階条件は，次のようになる。

$$\frac{d\mathrm{E}[\tilde{\pi} \mid z]}{dx} = -\lambda x + (\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z] - \kappa - \lambda x) = 0 \tag{4.7}$$

  - (4.7) 式から，$(\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z] - \kappa - \lambda x) = \lambda x$ が成り立つから，これを (4.6) 式に代入すると，情報トレーダーの期待利得 $\mathrm{E}[\tilde{\pi} \mid z]$ は λx^2 となる。
  - ただし，この期待利得は，情報トレーダーが私的情報 z を入手した後に最適な x を選択するときのものであり，私的情報 z を入手する前の事前の期待利得 $\mathrm{E}[\tilde{\pi}]$ は $\lambda\mathrm{E}[\tilde{x}^2]$ となる。
  - 情報トレーダーの期待利得最大化の 2 階条件は $\lambda > 0$ である。

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- (4.7) 式を整理すると次式が得られる。

$$x = \frac{1}{2\lambda}(\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z] - \kappa) \tag{4.8}$$

- 条件付き期待値 $\mathrm{E}[\tilde{v} \mid z]$ を計算し，注文量 x がシグナル z に依存していることを明示的にあらわすと，次のようになる。

$$x(z) = \frac{1}{2\lambda}\left(\mu + \frac{\sigma^2}{\sigma_z^2}(z - \mu) - \kappa\right) \tag{4.10}$$

Kyle (1985) モデル

3. 分析

ステップ**3**：マーケット・メーカーの株価設定ルール

- 均衡の条件 (ii) を求める。マーケット・メーカーは，注文量の合計 y に条件付けられた企業価値の期待値として株価を設定する。

$$p = \mathrm{E}[\tilde{v} \mid y] \tag{4.11}$$

- (4.11) 式は正規分布する変数 $\tilde{y}$ の実現値が $\tilde{y} = y$ であったときの条件付き期待値であることから，次のようにあらわすことができる。

$$p = E(\tilde{v}) + \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{v}, \tilde{y})}{\mathrm{Var}(\tilde{y})}(y - \mathrm{E}[\tilde{y}]) \tag{4.12}$$

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- ここで E[$\tilde{v}$]，E[$\tilde{y}$]，Cov($\tilde{v}, \tilde{y}$)，および Var($\tilde{y}$) は，次のように計算できる。

$$\mathrm{E}[\tilde{v}] = \mu \tag{4.13}$$

$$\mathrm{E}[\tilde{y}] = \mathrm{E}[\tilde{\tilde{x}} + \tilde{u}] = \mathrm{E}[\alpha + \beta\tilde{z}] = \alpha + \beta\mu \tag{4.14}$$

$$\mathrm{Cov}(\tilde{v}, \tilde{y}) = \mathrm{Cov}(\tilde{v}, \tilde{\tilde{x}}) = \mathrm{Cov}(\tilde{v}, \beta\tilde{z}) = \beta\,\mathrm{Cov}(\tilde{v}, \tilde{v}) = \beta\sigma^2 \tag{4.15}$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{y}) = \mathrm{Var}(\tilde{\tilde{x}} + \tilde{u}) = \mathrm{Var}(\beta\tilde{z}) + \sigma_u^2 = \beta^2\sigma_z^2 + \sigma_u^2 \tag{4.16}$$

- (4.12) 式に代入し，マーケット・メーカーが設定する株価 p が注文量の合計 y に依存して決まることを明示的にあらわすと，次のようになる。

$$p(y) = \mu + \frac{\beta\sigma^2}{\beta^2\sigma_z^2 + \sigma_u^2}(y - \alpha - \beta\mu) \tag{4.17}$$

Kyle (1985) モデル
3. 分析

ステップ**4**：合理的期待の条件

- 合理的期待を意味する均衡の条件 (iii) から，均衡においては，情報トレーダーの取引戦略 x とマーケット・メーカーによる情報トレーダーの取引戦略の予想 $\hat{x}$ は等しくなる。したがって，(4.3) 式と (4.10) 式の係数を比較することにより，次の関係が得られる。

$$\alpha = \frac{1}{2\lambda}(\mu - \kappa) - \beta\mu \tag{4.18}$$

$$\beta = \frac{1}{2\lambda}\frac{\sigma^2}{\sigma_z^2} \tag{4.19}$$

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- 同様に均衡においては，マーケット・メーカーの株価設定ルール p と情報トレーダーによるマーケット・メーカーの株価設定ルールの予想 $\hat{p}$ は等しくなる。したがって，(4.2) 式と (4.17) 式の係数を比較することにより，次の関係が得られる。

$$\kappa = \mu - \lambda(\alpha + \beta\mu) \tag{4.20}$$

$$\lambda = \frac{\beta\sigma^2}{\beta^2\sigma_z^2 + \sigma_u^2} \tag{4.21}$$

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- (4.19) 式と (4.21) 式からβとλが，さらに (4.18) 式と (4.20) 式からαとκが，それぞれ次のように求まる。

$$\alpha = -\beta\mu \tag{4.22}$$

$$\beta = \frac{\sigma_u}{\sigma_z} \tag{4.23}$$

$$\kappa = \mu \tag{4.24}$$

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{2\sigma_u\sigma_z} \tag{4.25}$$

  – 情報トレーダーの期待利得最大化の 2 階条件から$\lambda > 0$となること，さらにこのとき (4.19) 式から$\beta > 0$となる。

Kyle (1985) モデル

3. 分析

- これらを(4.2)式と(4.3)式に代入すれば，$x(z)$ と $p(y)$ が次のように求まる。

$$x(z) = \alpha + \beta z = \beta(z - \mu) = \frac{\sigma_u}{\sigma_z}(z - \mu) \tag{4.26}$$

$$p(y) = \kappa + \lambda y = \mu + \frac{\sigma^2}{2\sigma_u\sigma_z}y \tag{4.27}$$

証明終

Kyle (1985) モデルのポイント

- マーケット・メーカーは，観察できる情報をΩ_{MM}とあらわすと，$p = \mathrm{E}[v \mid \Omega_{MM}]$として株価を設定する。
- 情報トレーダーは，観察できる情報をΩ_{IT}とあらわすと，$\mathrm{E}[(v - p)x \mid \Omega_{IT}]$を最大化するように$x$を選択する。この期待利得は次のようにあらわすことができる。

$$\mathrm{E}[(v - p)x \mid \Omega_{IT}] = (\mathrm{E}[v \mid \Omega_{IT}] - \mathrm{E}[v \mid \Omega_{MM}])\, x$$

  - 注意：情報トレーダーが情報優位であることから次式が成立する。

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[v \mid \Omega_{MM}] \mid \Omega_{IT}] = \mathrm{E}[v \mid \Omega_{MM}]$$

- いま$\mathrm{E}[v \mid \Omega_{IT}] > \mathrm{E}[v \mid \Omega_{MM}]$とする。このとき$x > 0$とすれば期待利得が正となる。ただし，$x$を大きくすると$\mathrm{E}[v \mid \Omega_{MM}]$も大きくなるため，トレードオフが存在することになる。
- **Kyle (1985)** モデルのポイント : 情報トレーダーとマーケット・メーカーの情報の非対称性（または注文量の調整と情報優位の減少のトレードオフ）

［枚数調整］

［枚数調整］

［枚数調整］

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

情報トレーダーの期待利得

- 私的情報$\tilde{z}$を受け取る前の時点における情報トレーダーの期待利得は$\mathrm{E}[\tilde{\pi}] = \lambda \mathrm{E}[\tilde{x}^2]$である。$\lambda$および$\tilde{x}$を代入して整理すると次のようになる。

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi}] = \frac{\sigma^2}{2\sigma_u \sigma_z} \mathrm{E}\left[\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_z} (\tilde{z} - \mu) \right)^2 \right] = \frac{\sigma^2 \sigma_u}{2\sigma_z} \tag{4.28}$$

  - 情報トレーダーの期待利得は，σ_u^2が大きいほど大きくなる。
- マーケット・メーカーは，情報トレーダーの取引量とノイズ・トレーダーの取引量を区別して観察することはできないので，情報トレーダーはノイズ・トレーダーによる取引を利用して自身の取引を隠すことができる。
- 情報トレーダーの期待利得は，情報トレーダーとマーケット・メーカーの情報の非対称性に依存する。

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

- また$\sigma_z^2 = \sigma^2 + \sigma_1^2$であることから，私的情報に含まれるノイズの分散$\sigma_1^2$が小さくなればなるほど，期待利得は大きくなる。
- 私的情報に含まれるノイズの分散σ_1^2が小さいほど，情報トレーダーは，より精度の高い情報を持つことになり，したがってマーケット・メーカーよりもますます情報優位になる。
- ここでも鍵となるのは情報の非対称性の大きさである。

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

ノイズ・トレーダーの期待利得

- ノイズ・トレーダーの期待利得 $\mathrm{E}[\tilde{\pi}^N]$ は次のようになる。

$$\mathrm{E}[\tilde{\pi}^N] = \mathrm{E}[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{u}] = -\mathrm{E}[\tilde{p}\tilde{u}] = -\lambda\mathrm{E}[\tilde{y}\tilde{u}] = -\lambda\mathrm{E}[\tilde{u}^2] = -\lambda\sigma_u^2 = -\frac{\sigma^2\sigma_u}{2\sigma_z} \tag{4.32}$$

- マーケット・メーカーの期待利得はゼロであることから，情報トレーダーの期待利得はノイズ・トレーダーの期待損失に一致することになる。

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

情報トレーダーの取引戦略

- 均衡における情報トレーダーの取引戦略 $x(z)$ の β $(= \sigma_u/\sigma_z)$ に注目する。
- 情報トレーダーの取引量はまず，ノイズ・トレーダーの注文量の分散 σ_u^2 に依存することがわかる。
  – ノイズ・トレーダーの取引量の分散が大きくなると，情報トレーダーとマーケット・メーカーの情報の非対称性は大きくなるため，情報トレーダーは取引量を大きくすることができる。
- 同様に β は，情報トレーダーの持つ私的情報の分散 σ_z^2 にも依存している。
  – β の分母に σ_z があることから，情報トレーダーの私的情報の分散が小さくなれば，つまり私的情報の精度が高くなり，情報トレーダーがマーケット・メーカーよりも情報優位になれば，情報トレーダーは取引量を大きくすることができる。

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

- 情報トレーダーの取引戦略 $x(z)$ において，証明の (4.3) 式において仮定した α は $-\beta\mu$ と等しくなっており，$x(z) = \beta(z - \mu)$ と α を使わずに表現できる。
- 入手した私的情報 z がその事前の期待値 μ とどれだけ異なっているのかが重要となる。
- 情報トレーダーが私的情報 z を得る前の期待取引量を計算すると，次のようにゼロになる。

$$\mathrm{E}[x(\tilde{z})] = \mathrm{E}[\alpha + \beta\tilde{z}] = \mathrm{E}[-\beta\mu + \beta\tilde{z}] = 0 \tag{4.34}$$

- したがって，証明の (4.3) 式において，情報トレーダーの取引戦略は，私的情報の実現値とその事前の期待値の差に係数をかけ，定数項をゼロにした $x(z) = \beta(z - \mu)$ と仮定しても解ける。

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

マーケット・メーカーの株価設定ルール

- 均衡におけるマーケット·メーカーの株価設定ルール $p(y)$ の $\lambda\,(=\sigma^2/2\sigma_u\sigma_z)$ に注目する。λ は，注文量の合計 y の影響の程度と考えられる。
- まず，ノイズ・トレーダーの取引量の分散 σ_u^2 が小さくなればなるほど，λ は大きくなることがわかる。
- σ^2 と σ_1^2 については，すでに説明した情報トレーダーの期待利得についての考察とまったく同様である。すなわち，企業価値の分散 σ^2 が大きくなるほど，また情報トレーダーの私的情報に含まれるノイズの分散 σ_1^2 が小さくなるほど，注文量の合計 y の影響の程度 λ は大きくなる。

Kyle (1985) モデル

4. 均衡の特徴

- マーケット・メーカーの株価設定ルール $p(y)$ において，証明の (4.2) 式において仮定した κ が μ と等しくなっている。
- y に条件付けられた企業価値 $\tilde{v}$ の期待値は次のようになる。

$$\mathrm{E}[\tilde{v} \mid y] = \mu + \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{v}, \tilde{y})}{\mathrm{Var}(\tilde{y})}(y - \mathrm{E}[\tilde{y}]) \tag{4.36}$$

  – ここで情報トレーダーの取引量 $\tilde{x}$ とノイズ・トレーダーの取引量 $\tilde{u}$ の合計 $\tilde{y}$ の事前の期待値を計算するとゼロになる。

$$\mathrm{E}[\tilde{y}] = \mathrm{E}[\tilde{x} + \tilde{u}] = \mathrm{E}[\beta(\tilde{z} - \mu)] = 0 \tag{4.35}$$

- (4.36) 式において $\mathrm{E}[\tilde{y}]$ がゼロとなることから，証明の (4.2) 式において，マーケット・メーカーの株価設定ルールは $p(y) = \mu + \lambda y$ と仮定しても解ける。

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

市場の流動性

- Kyle (1985) は，λ の逆数を市場の流動性 (market liquidity)* を測る一つの指標と解釈している。

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\sigma_u \sigma_z}{\sigma^2} \tag{4.37}$$

- 市場の流動性とは，一般的にいえば，取引量が株価に及ぼす影響の程度をいう。流動性が高い市場とは，取引量が形成される株価に与える影響の程度が相対的に小さい市場のことである。

*市場の深さ (market depth) ともよばれる。

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

- 株価設定ルールの式から明らかなように，λ は市場における注文量の合計が株価に与える限界的な影響を示すものであり，市場の流動性が高ければ高いほど，λ は相対的に小さくなると考えられる。それゆえ，λ の逆数を市場の流動性を測る指標とするのである。
- ノイズ・トレーダーの取引量の分散 σ_u^2 が大きければ大きいほど，情報トレーダーの持つ私的情報に含まれるノイズの分散 σ_1^2 が大きければ大きいほど，また企業価値の分散 σ^2 が小さければ小さいほど，市場の流動性は高まる。

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

株価の情報提供性

- マーケット・メーカーが設定する株価には，注文量の合計yから推測された情報トレーダーの私的情報zの情報内容が反映されている。
- つまり観察される株価には，企業価値に関する何らかの情報が含まれているのである。
- この点を考慮して，株価を観察することによって企業価値の推測がどの程度可能になるのかを測るためのの一つの指標として，株価の情報提供性(informativeness) $\psi = \mathrm{Var}(\tilde{v}) - \mathrm{Var}(\tilde{v} \mid p)$ を定義する。

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

- 株価の情報提供性ψは次のようになる。

$$\psi = \mathrm{Var}(\tilde{v}) - \mathrm{Var}(\tilde{v} \mid p) = \sigma^2 - \sigma^2(1 - \rho_{pv}^2) = \sigma^2\rho_{pv}^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2\sigma^2}{\sigma_z^2} \tag{4.38}$$

- ここで企業価値$\tilde{v}$と情報トレーダーの私的情報$\tilde{z}$の相関係数ρ_{vz}は，次のようになる。

$$\rho_{vz} = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{v}, \tilde{z})}{\sigma\sigma_z} = \frac{\sigma}{\sigma_z} \tag{4.39}$$

- (4.39) 式を (4.38) 式に代入すると，次の結果が得られる。

$$\psi = \frac{1}{2}\sigma^2\rho_{vz}^2 \tag{4.40}$$

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

- 株価の情報提供性ψ

$$\psi = \frac{1}{2}\sigma^2\rho_{vz}^2 \tag{4.40}$$

  - 相関係数ρ_{vz}は，$0 \leq \rho_{vz} \leq 1$である。
  - 株価の情報提供性ψは，最大$\sigma^2/2$，最小0となる。
  - たとえば，企業価値と情報トレーダーの私的情報の情報内容が等しい場合，つまり$\rho_{vz} = 1$のとき，私的情報を得ることで事前の企業価値の分散σ^2が$\sigma^2/2$となり，ちょうど半減することがわかる。

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

株価の変化度

- マーケット・メーカーが設定する株価には，注文量の合計yから推測された情報トレーダーの私的情報zの情報内容が反映される。
- 市場が開き，取引がおこなわれることで，株価がどの程度反応するのかを示す指標として，**株価の変化度** (price reaction) を測定することがある。
- 株価の変化度は，事前の企業価値の期待値がμであることから，μと設定される株価との差の絶対値の期待値として定義される。

$$\mathrm{E}[|\tilde{p}-\mu|] = \frac{\sigma^2}{2\sigma_u\sigma_z}\mathrm{E}[|\tilde{x}|] = \frac{\sigma^2}{2\sigma_u\sigma_z}\frac{\sigma_u}{\sigma_z}\mathrm{E}[|(\tilde{z}-\mu)|] = \frac{\sigma^2}{2\sigma_z^2}\mathrm{E}[|(\tilde{z}-\mu)|] \quad (4.41)$$

数学付録

正規分布にしたがう変数の絶対値の期待値

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[|X|] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times 2 \int_{0}^{+\infty} x\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx\end{aligned}$$

ここで $x^2/2\sigma^2 = u$ とおくと，$du/dx = x/\sigma^2$ から $x\,dx = \sigma^2\,du$ となることから，次のように書きかえることができる。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[|X|] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{0}^{+\infty} \sigma^2 \exp(-u)\, du = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\, -\exp(-u)\, \right]_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times 1 \\ &= \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \qquad \text{(C.5)}\end{aligned}$$

Kyle (1985) モデル

5. その他の均衡の特徴

- (4.41) 式において，$(\tilde{z}-\mu)$ は，平均0，分散 σ_z^2 の正規分布にしたがう。
- (C.5) 式を用いて (4.41) 式を整理する。

$$\mathrm{E}[|\tilde{p}-\mu|] = \frac{\sigma^2}{2\sigma_z^2}\sqrt{\frac{2\sigma_z^2}{\pi}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \tag{4.42}$$

  – 企業価値の分散 σ^2 が大きいほど，また私的情報に含まれるノイズの分散 σ_1^2 が小さいほど，株価の変化度は大きくなることがわかる。

Kyle (1985) モデル
5. その他の均衡の特徴

- 株価の変化度

$$\mathrm{E}[|\tilde{p} - \mu|] = \frac{\sigma^2}{2\sigma_z^2}\sqrt{\frac{2\sigma_z^2}{\pi}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \tag{4.42}$$

  - ノイズ・トレーダーの取引量の分散σ_u^2には影響を受けない。
  - その理由は，情報トレーダーの取引戦略におけるβの分子に含まれるσ_uを打ち消すかたちで，マーケット・メーカーの株価設定ルールにおけるλの分母にσ_uが入っているからである。
  - マーケット・メーカーが将来の企業価値を予想する際には，このようなノイズ・トレーダーの取引量の分散は無意味である。
  - したがって，マーケット・メーカーは情報トレーダーの注文量の期待値に対して，ノイズ・トレーダーの取引量の分散を打ち消すように調整して，企業価値を予想する。

参考：Kyle (1985) モデルを用いた会計研究

- Admati and Pfleiderer (1988; RFS): Kyle (1985) モデルを複数の情報トレーダー，二種類の流動性トレーダーの設定に拡張
- Kim and Verrecchia (1994; JAE): 複数の情報トレーダーが存在し，またそれぞれの情報トレーダーが異なる私的情報を持つ状況において，会計情報といった公的情報の開示が，情報の非対称性を増大させ，流動性を低め，取引量を大きくすることを示した。
- Zhang (2001, CAR): 経営者による自発的開示（内生的）
- Fischer and Stocken (2004, JAR): 経営者による利益マネジメント
- Dye and Sridhar (2008, JAE): 厳格な会計基準と柔軟な会計基準の比較
- Bertomeu (2012, JAAF): 報酬契約の開示
- Einhorn (2018, TAR): 追加的な私的・公的情報が得られるケース

参考：その他の資本市場モデルとその応用

- Grossman and Stiglitz (1980, AER) ··· Demski and Feltham (1994, JAE)
- Hellwig (1980, JET), Verrecchia (1982, JF) ··· Kim and Verrecchia (1991, JFE)
- Glosten and Milgrom (1985, JFE)
- Shin (2003, Econometrica) ··· Shin (2006, JAR)
- Easley and O’Hara (2004, JF) ··· Lambert, Leuz, and Verrecchia (2007, JAR; 2012, RoF), Hughes, Liu, and Liu (2007, TAR; 2009, RFS), Christensen, Rosa, and Feltham (2010, TAR), Lambert, and Verrecchia (2015, CAR)

2018年度：課題#4

［2019年度会計理論分析の課題ではありません。ただし，提出すれば解答を渡します。］

問題1. 証明の(4.2)式および(4.3)式を次のように仮定して命題4.1を導出しなさい。

- マーケット・メーカーの株価設定ルール：$p(y) = \mu + \lambda y \quad (4.2')$
- 情報トレーダーの取引戦略：$x(z) = \beta(z - \mu) \quad (4.3')$

2018年度：課題#4

問題2. 情報トレーダーの私的情報zが開示され，これをマーケット・メーカーも観察して株価を設定するケースについて，下記の問いに答えなさい。ただし，ノイズ・トレーダーの行動は変わらないものとする。

– マーケット・メーカーの株価設定ルールは$p(y) = \mu + \lambda_1 y + \lambda_2 v$，情報トレーダーの取引戦略は上記(4.3')式として解きなさい。

(1) マーケット・メーカーの問題（ステップ3）を考え，マーケット・メーカーの株価設定ルールが，$p(y, z) = \mu+\lambda_1 y+\lambda_2 z$ではなく，$p(z) = \mu+\lambda z$とあらわされることを示しなさい（$\lambda_1 = 0$になることを示しなさい）。また，このことは何を意味するか説明しなさい。

数学付録

- 分割：定数 $k < n$ に対して，次のように $\boldsymbol{X}$ の**分割**(partition) を定義する。

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_1} \\ \boldsymbol{\mu_2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_{11}} & \boldsymbol{\Sigma_{12}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{21}} & \boldsymbol{\Sigma_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X_1} = (X_1,\ X_2 \ldots,\ X_k)',\ \ \boldsymbol{X_2} = (X_{k+1},\ X_{k+2} \ldots,\ X_n)'$$

$$\boldsymbol{\mu_1} = (\mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ \mu_k)',\ \ \boldsymbol{\mu_2} = (\mu_{k+1},\ \mu_{k+2}, \ldots,\ \mu_n)'$$

数学付録

- n変量正規分布の条件付き期待値と条件付き分散共分散
  - いま，$\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とし，上記のような分割を考える。このとき，任意の定数 $k < n$ について，$\boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{x_2}$ のときの $\boldsymbol{X_1}$ の条件付き分布は $N(\boldsymbol{\mu_{1\cdot 2}}, \boldsymbol{\Sigma_{11\cdot 2}})$ になる。ここで$\boldsymbol{\mu_{1\cdot 2}}$ および $\boldsymbol{\Sigma_{11\cdot 2}}$ は，次のようである。

$$\boldsymbol{\mu_{1\cdot 2}} = \boldsymbol{\mu_1} + \boldsymbol{\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}}(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{\mu_2}) \tag{E.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_{11\cdot 2}} = \boldsymbol{\Sigma_{11}} - \boldsymbol{\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}} \tag{E.3}$$

  - これらは，正規分布にしたがう確率変数を考えるとき，さまざまな状況に応用することができる。たとえば，$n = 2$, $k = 1$ とすれば，二変量正規分布における条件付き期待値の公式になる。また$n = 3$, $k = 1$ とすれば，二つの確率変数X_2 とX_3 を観察したときのX_1 の条件付き期待値を得ることができる。

数学付録

- 二つの確率変数X_2とX_3の実現値を観察したときのX_1の条件付き期待値

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X_1 \mid X_2 = x_2,\ X_3 = x_3] \\
&\quad = \boldsymbol{\mu_1} + \boldsymbol{\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)} \\
&\quad = \mu_1 + \left(\frac{\sigma_{12} - \dfrac{\sigma_{23}\sigma_{31}}{\sigma_3^2}}{\sigma_2^2 - \dfrac{(\sigma_{23})^2}{\sigma_3^2}} \right)(x_2 - \mu_2) + \left(\frac{\sigma_{13} - \dfrac{\sigma_{32}\sigma_{21}}{\sigma_2^2}}{\sigma_3^2 - \dfrac{(\sigma_{32})^2}{\sigma_2^2}} \right)(x_3 - \mu_3) \qquad \text{(E.5)}
\end{aligned}
$$

  - $(x_2 - \mu_2)$および$(x_3 - \mu_3)$の係数は，二変量正規分布における条件付き期待値と同じように解釈することができる。たとえば，$(x_2 - \mu_2)$の係数の分母はX_3を所与としたときのX_2の条件付き分散，また分子はX_3を所与としたときのX_1とX_2の条件付き共分散になる。したがって，X_2とX_3の情報を得てX_1の条件付き期待値を考える場合には，X_2とX_3がそれぞれが持っている情報のうち，他方に含まれている情報についての修正をおこなっていると考えることができる。

2018年度：課題#4

問題2. 情報トレーダーの私的情報zが開示され，これをマーケット・メーカーも観察して株価を設定するケースについて，下記の問いに答えなさい。ただし，ノイズ・トレーダーの行動は変わらないものとする。

(2) (1) から，$p(y, z) = \mathrm{E}[v \mid y, z]$ としても，$p(z) = \mathrm{E}[v \mid z]$ になることが分かる。このことから $p(z)$ はどのようにあらわされるか答えなさい。

(3) マーケット・メーカーの株価設定ルールを $\hat{p}(z) = \mu + \lambda(z - \mu)$ と仮定し，情報トレーダーの問題を解くとどうなるか答えなさい。

(4) マーケット・メーカーの株価設定ルールが $p(z) = \mathrm{E}[v \mid z]$ であることから，(3) の解はどうなるか答えなさい。このとき，情報トレーダーの期待利得も答えなさい。

(5) 以上から，解はどのようになるか答えなさい。