

会計情報に基づく企業価値評価(4)

作成：2018年7月3日

更新：2018年7月20-21日, 8月20日, 2019年4月25日

椎葉 淳

TOPIC #1

Ohlson モデル

- Ohlson, J, A., 1995. “Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation,” *Contemporary Accounting Research* 11(2), pp. 661–687.
- Ohlson, J, A., 2001. “Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation: An Empirical Perspective,” *Contemporary Accounting Research* 18(1), pp. 107–120.

1. Ohlson モデル

1.1 残余利益モデル（復習）

- 残余利益モデル (Residual Income Model; RIM)
 - いくつかの仮定の下で次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[D_{t+i}]}{(1+r)^i} = Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \quad (1)$$

- * $X_{t+i}^a \equiv X_{t+i} - rY_{t+i-1}$ は時点 $t+i$ の残余利益 (Residual Income) と定義する。
- * (1) 式の右辺 $\left(Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \right)$ にしたがって株主価値評価を行なうモデルを残余利益モデルと呼ぶ。

1. Ohlson モデル

1.1 残余利益モデル（復習）

- 残余利益モデルは，次期以降の将来残余利益が每期一定成長のときには，次のように表すことができる。

$$V_t = Y_t + \frac{E_t[X_{t+1}^a]}{r - g} \quad (2)$$

- 将来残余利益の一定成長という仮定と同じ意味で，残余利益が次式のような時系列にしたがうと仮定することも多い。

$$X_{t+i+1}^a = \omega X_{t+i}^a + \varepsilon_{t+i+1} \quad (3)$$

- * ω は $0 < \omega < 1 + r$ を満たす定数であり， ε_{t+i+1} は期待値ゼロの確率変数である。
- * このとき $E_t[X_{t+i}^a] = \omega^i X_t^a$ が成り立つ。なお， ω は $1 + g$ に対応する。
- * Ohlson モデル (Ohlson, 1995, CAR) の簡略版である。ただし，Ohlson (1995) では $0 \leq \omega \leq 1$ と仮定している。

1. Ohlson モデル

1.2 線形情報動学

- 残余利益 X_{t+i}^a とその他の情報 (other information) v_{t+i} に関して、次の時系列を仮定する。

$$X_{t+i+1}^a = \omega X_{t+i}^a + v_{t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (4)$$

$$v_{t+i+1} = \gamma v_{t+i} + \varepsilon_{2,t+i+1} \quad (5)$$

- $E_t[\varepsilon_{1,t+i+1}] = 0, E_t[\varepsilon_{2,t+i+1}] = 0, i \geq 0$
- ω, γ は $0 \leq \omega < 1, 0 \leq \gamma < 1$ を満たす定数であり既知とする。
- その他の情報 v_t がなければ (3) 式に一致する。つまり、将来残余利益が一定成長の残余利益モデルになる。
- この二式はしばしば線形情報動学 (Linear Information Dynamics; LID) と呼ばれる。

1. Ohlson モデル

1.3 Ohlson モデルとは

- CSR を仮定し残余利益モデルが成立するとする。また (4) 式と (5) 式の線形情報動学を仮定する。このとき次式が成り立つ。

$$V_t = Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} X_t^a + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \quad (6)$$

- Y_t, X_t^a, v_t という t 期の情報のみで表されている。
- (6) 式は Ohlson (1995, CAR) において示された式であり、この右辺にしたがって株主価値評価を行なうモデルを Ohlson モデルと呼ぶ。
- Ohlson モデルは当初、(2) 式の将来残余利益が一定成長する残余利益モデルと混同されていた。
 - * 残余利益概念は古くから存在しているが、Ohlson (1995, CAR) の論文によって、残余利益モデル自体も脚光を浴びたため。

1. Ohlson モデル

1.4 Ohlson モデルの別表現

- Ohlson モデルは次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} X_t^a + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \\ &= Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} (X_t - r(-X_t + D_t + Y_t)) + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \\ &= Y_t + \frac{r\omega}{1+r-\omega} \left(\frac{1+r}{r} X_t - D_t - Y_t \right) + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \\ &= (1-k)Y_t + k \left(\frac{1+r}{r} X - D_t \right) + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \end{aligned} \quad (7)$$

where $k \equiv \frac{r\omega}{1+r-\omega}$

- この(7)式を Ohlson モデルと呼ぶこともある。例：石川(2007)など

2. Ohlson モデルの導出

2.1 導出方法(1)

- $t + i$ 期のその他の情報 v_{t+i} の期待値 : $E_t[v_{t+i}] = \gamma^i v_t$
- $t + i$ 期の残余利益 X_{t+i}^a の期待値

$$\begin{aligned} E_t [X_{t+i}^a] &= E_t [\omega X_{t+i-1}^a + v_{t+i-1} + \varepsilon_{1,t+i}] \\ &= \omega E_t [X_{t+i-1}^a] + E_t [v_{t+i-1}] \\ &= \omega E_t [\omega X_{t+i-2}^a + v_{t+i-2} + \varepsilon_{1,t+i-1}] + \gamma^{i-1} v_t \\ &= \omega^2 E_t [X_{t+i-2}^a] + \omega E_t [v_{t+i-2}] + \gamma^{i-1} v_t \\ &= \omega^2 E_t [X_{t+i-2}^a] + \omega \gamma^{i-2} v_t + \gamma^{i-1} v_t \\ &= \omega^i X_t^a + \sum_{j=1}^i \omega^{j-1} \gamma^{i-j} v_t \end{aligned}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.1 導出方法(1)

- $\sum_{j=1}^i \omega^{j-1} \gamma^{i-j} v_t$ の部分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i \omega^{j-1} \gamma^{i-j} v_t &= \left(\sum_{j=1}^i \omega^{j-1} \gamma^{i-j} \right) v_t \\ &= \frac{\gamma^{i-1} (1 - (\omega \gamma^{-1})^i)}{1 - \omega \gamma^{-1}} v_t \quad (\text{等比数列の和の公式}) \\ &= \frac{\gamma^i (1 - \omega^i \gamma^{-i})}{\gamma - \omega} v_t \\ &= \frac{\gamma^i - \omega^i}{\gamma - \omega} v_t \end{aligned}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.1 導出方法(1)

- したがって、 $t+i$ 期の残余利益 X_{t+i}^a の期待値は次のようになる。

$$E_t [X_{t+i}^a] = \omega^i X_t^a + \frac{\gamma^i - \omega^i}{\gamma - \omega} v_t$$

- このとき、残余利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t [X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \\ &= Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega^i X_t^a}{(1+r)^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \cdot \frac{\gamma^i - \omega^i}{\gamma - \omega} v_t \\ &= Y_t + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega^i}{(1+r)^i} \right) X_t^a + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma^i - \omega^i}{(1+r)^i} \right) \frac{v_t}{\gamma - \omega} \end{aligned}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.1 導出方法(1)

- さらに整理する。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega^i}{(1+r)^i} \right) X_t^a + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma^i - \omega^i}{(1+r)^i} \right) \frac{v_t}{\gamma - \omega} \\ &= Y_t + \left(\frac{\frac{\omega}{1+r}}{1 - \frac{\omega}{1+r}} \right) X_t^a + \left(\frac{\frac{\gamma}{1+r}}{1 - \frac{\gamma}{1+r}} - \frac{\frac{\omega}{1+r}}{1 - \frac{\omega}{1+r}} \right) \frac{v_t}{\gamma - \omega} \\ &= Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} X_t^a + \frac{\gamma(1+r-\omega) - \omega(1+r-\gamma)}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \cdot \frac{v_t}{\gamma - \omega} \\ &= Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} X_t^a + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \end{aligned}$$

[証明終]

- これは Ohlson (1995, p.669) の (5) 式に等しい (Ohlson (1995) はここでの $1+r$ を R_f と表している)。

2. Ohlson モデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- 例えば Clubb (2013, RAST) はこの方法で証明している。
- 線形情報動学は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} X_{t+i+1}^a \\ v_{t+i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t+i}^a \\ v_{t+i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

- $z_{t+i} = \begin{pmatrix} X_{t+i}^a \\ v_{t+i} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{t+i+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix}$ とする。このとき、線形情報動学は次のように表すことができる。

$$z_{t+i+1} = Az_{t+i} + \varepsilon_{t+i+1} \quad (9)$$

2. Ohlson モデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- 将来の z_{t+i} の期待値について，次式が成り立つ。

$$E_t[z_{t+i}] = A^i z_t \quad (10)$$

- また， $i \rightarrow \infty$ のとき $\frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} \rightarrow 0$ を仮定すると，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} &= \frac{1}{1+r} A z_t + \frac{1}{(1+r)^2} A^2 z_t + \frac{1}{(1+r)^3} A^3 z_t + \dots \\ &= [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} = \mathbf{e}\mathbf{1}' [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \quad (12)$$

$$\text{where } \mathbf{e}\mathbf{1}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- $[(1 + r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$ を mathematica を利用して計算する。

$$\text{In}[1] = W = \{\{\omega, 1\}, \{0, \gamma\}\}$$

$$\text{Out}[1] = \{\{\omega, 1\}, \{0, \gamma\}\}$$

$$\text{In}[2] = \mathbf{II} = \text{IdentityMatrix}[2]$$

$$\text{Out}[2] = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$$

$$\text{In}[3] = \text{INV} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[(1 + r)\mathbf{II} - W]]$$

$$\text{Out}[3] = \left\{ \left\{ \frac{1}{1 + r - \omega}, \frac{1}{(1 + r - \gamma)(1 + r - \omega)} \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{1 + r - \gamma} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[4] = \text{Simplify}[\text{INV}.W]$$

$$\text{Out}[4] = \left\{ \left\{ \frac{\omega}{1 + r - \omega}, \frac{1 + r}{(1 + r - \gamma)(1 + r - \omega)} \right\}, \left\{ 0, \frac{\gamma}{1 + r - \gamma} \right\} \right\}$$

2. Ohlsonモデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- このとき，残余利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \\ &= Y_t + \mathbf{e}\mathbf{1}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}\mathbf{z}_t \\ &= Y_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{1+r-\omega} & \frac{1+r}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} \\ 0 & \frac{\gamma}{1+r-\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \\ &= Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} X_t^a + \frac{1+r}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} v_t \quad \text{[証明終]} \end{aligned}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.3 導出方法(3) : Ohlson (1995, CAR) の方法

- 線形情報動学は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} X_{t+i+1}^a \\ v_{t+i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t+i}^a \\ v_{t+i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

- $z_{t+i} = \begin{pmatrix} X_{t+i}^a \\ v_{t+i} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{t+i+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix}$ とする。このとき、線形情報動学は次のように表すことができる。

$$z_{t+i+1} = Az_{t+i} + \varepsilon_{t+i+1} \quad (14)$$

2. Ohlson モデルの導出

2.3 導出方法(3) : Ohlson (1995, CAR) の方法

- 将来の z_{t+i} の期待値について，次式が成り立つ。

$$E_t[z_{t+i}] = A^i z_t \quad (15)$$

$$\Rightarrow E_t[X_{t+i}^a] = (1 \ 0) A^i z_t = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \quad (16)$$

- Ohlson (1995) にしたがって，次のように P を定義する。

$$P \equiv \frac{1}{1+r} A = \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (17)$$

- このとき次式が成り立つ。

$$\frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} = \frac{1}{(1+r)^i} (1 \ 0) A^i z_t = (1 \ 0) P^i z_t = (1 \ 0) P^i \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \quad (18)$$

2. Ohlson モデルの導出

2.3 導出方法(3) : Ohlson (1995, CAR) の方法

- このとき, 残余利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \\ &= Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \left((1 \ 0) \mathbf{P}^i \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \right) \\ &= Y_t + (1 \ 0) [\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \mathbf{P}^3 + \dots] \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \\ &= Y_t + (1 \ 0) \mathbf{P} [\mathbf{I} - \mathbf{P}]^{-1} \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.3 導出方法(3) : Ohlson (1995, CAR) の方法

- $[I - P]^{-1}$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} [I - P]^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega}{1+r} & -\frac{1}{1+r} \\ 0 & 1 - \frac{\gamma}{1+r} \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega}{1+r}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{1+r}\right)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma}{1+r} & \frac{1}{1+r} \\ 0 & 1 - \frac{\omega}{1+r} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} \begin{pmatrix} 1+r-\gamma & 1 \\ 0 & 1+r-\omega \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

2. Ohlson モデルの導出

2.3 導出方法(3) : Ohlson (1995, CAR) の方法

- したがって、 $\mathbf{P}[\mathbf{I} - \mathbf{P}]^{-1}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\mathbf{I} - \mathbf{P}]^{-1} &= \frac{1}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r-\gamma & 1 \\ 0 & 1+r-\omega \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} \begin{pmatrix} \omega(1+r-\gamma) & 1+r \\ 0 & \gamma(1+r-\omega) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\omega}{1+r-\omega} & \frac{1+r}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} \\ 0 & \frac{\gamma}{1+r-\gamma} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

2. Ohlson モデルの導出

2.3 導出方法(3) : Ohlson (1995, CAR) の方法

- $\mathbf{P}[\mathbf{I} - \mathbf{P}]^{-1}$ を代入すれば, 残余利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + (1 \quad 0) \mathbf{P}[\mathbf{I} - \mathbf{P}]^{-1} \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \\ &= Y_t + (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{\omega}{1+r-\omega} & \frac{1+r}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} \\ 0 & \frac{\gamma}{1+r-\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^a \\ v_t \end{pmatrix} \\ &= Y_t + \frac{\omega}{1+r-\omega} X_t^a + \frac{1+r}{(1+r-\omega)(1+r-\gamma)} v_t \end{aligned} \quad (21)$$

- 椎葉コメント : 導出方法(2)の方が簡潔で分かりやすいと思われる。

3. Ohlson (2001) モデル

- Ohlson (2001, CAR)
 - その他の情報 v_t の別表現を用いたモデルを示した。
 - Ohlson (2001) モデルは，日本でも次の文献などにより有名。
 - * 太田 (2002)，石川 (2007) (モデルは第3章，実証は第4章，第5章，補論，第11章参照)，矢内 (2003, 2004, 2008a)，新谷 (2009)，石川 (2019) など。

3. Ohlson (2001) モデル

- 導出

- 線形情報動学

$$X_{t+i+1}^a = \omega X_{t+i}^a + v_{t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (22)$$

- $i = 0$ として (22) 式の期待値をとる。

$$\begin{aligned} E_t[X_{t+1}^a] &= \omega X_t^a + v_t \\ \iff v_t &= E_t[X_{t+1}^a] - \omega X_t^a \\ &= E_t[X_{t+1}] - rY_t - \omega(X_t - r(-X_t + D_t + Y_t)) \\ &= E_t[X_{t+1}] - r(1 - \omega)Y_t - \omega((1 + r)X_t - rD_t) \\ &= E_t[X_{t+1}] - r(1 - \omega)Y_t - r\omega \left(\frac{1+r}{r} X_t - D_t \right) \end{aligned} \quad (23)$$

* $E_t[X_{t+1}]$ はアナリスト予想，経営者予想を用いる。この (23) 式を利用すれば，その他の情報 v_t があるモデルを前提にしつつ，その他の情報を用いずに実証分析を行なうことができる。

3. Ohlson (2001) モデル

- 導出

- (23) 式を (7) 式の Ohlson モデルに代入する。

$$\begin{aligned} V_t &= \left(1 - \frac{r\omega}{1+r-\omega}\right) Y_t + \frac{r\omega}{1+r-\omega} \left(\frac{1+r}{r} X - D_t\right) + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} v_t \\ &= \frac{(1+r)(1-\omega)}{1+r-\omega} Y_t + \frac{r\omega}{1+r-\omega} \left(\frac{1+r}{r} X - D_t\right) \\ &\quad + \frac{1+r}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \left(E_t[X_{t+1}] - r(1-\omega)Y_t - r\omega \left(\frac{1+r}{r} X_t - D_t\right) \right) \\ &= \frac{(1+r)(1-\omega)(1-\gamma)}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} Y_t + \frac{-r\omega\gamma}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \left(\frac{1+r}{r} X_t - D_t\right) \\ &\quad + \frac{r(1+r)}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \frac{E_t[X_{t+1}]}{r} \end{aligned} \tag{24}$$

3. Ohlson (2001) モデル

- Ohlson (2001) モデル

$$V_t = \beta_1 Y_1 + \beta_2 \left(\frac{1+r}{r} X_t - D_t \right) + \beta_3 \frac{E_t[X_{t+1}]}{r} \quad (25)$$

$$\beta_1 \equiv \frac{(1+r)(1-\omega)(1-\gamma)}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, \beta_2 \equiv \frac{-r\omega\gamma}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, \beta_3 \equiv \frac{r(1+r)}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}$$

- $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ が成立する (Ohlson, 2001, p.117)。

- mathematica メモ

```
In := Simplify[(1+r)(1-ω)(1-γ) - rωγ + r(1+r)]
Out := (1+r-γ)(1+r-ω)
```

3. Ohlson (2001) モデル

- Ohlson (2001) モデル

$$V_t = \beta_1 Y_t + \beta_2 \left(\frac{1+r}{r} X_t - D_t \right) + \beta_3 \frac{E_t[X_{t+1}]}{r}$$

- 石川 (2007, p. 67) の説明

- * この式は、簿価 (Y_t)、配当控除後の資本化利益 ($(1+r)X_t/r - D_t$)、および資本化された次期の予想利益 ($E_t[X_{t+1}]/r$) の加重平均 ($\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$) として株主価値が表現されている、などと言われる。
- * 直接的に観察不可能であった当期の「その他の情報」の代わりに、次期の予想利益がモデルに組み込まれている。
- * 通常、次期の予想利益は、企業経営者やアナリストによって提供されており、客観的に観察可能な具体的数値としての側面を有する。したがって、この式は実証分析を行なう上で操作しやすい評価モデルであると言える。

3. Ohlson (2001) モデル

- Ohlson (2001) モデルは次のように表すこともある。

$$V_t = \theta_1 Y_1 + \theta_2 X_t + \theta_3 D_t + \theta_4 E_t[X_{t+1}] \quad (26)$$

$$\theta_1 \equiv \beta_1, \theta_2 \equiv \beta_2 \frac{1+r}{r}, \theta_3 \equiv \beta_2, \theta_4 \equiv \frac{\beta_3}{r}$$

- 実証分析の際には、さらに(26)式の両辺を Y_t で割るなどすることが一般的である。太田・斉藤・吉野 (2015) など参照。

[枚数調整]

TOPIC #2

FOモデル

- Feltham, J. A., and J. A., Ohlson, 1995. “Valuation and Clean Surplus Accounting for Operating and Financial Activities,” *Contemporary Accounting Research* 11(2), pp. 689–731.
- Liu, J., and J. A. Ohlson 2000. “The Feltham-Ohlson (1995) Model: Empirical Implications,” *Journal of Accounting, Auditing & Finance* 15(3), pp. 321–331.

1. FOモデル

1.1 組替F/Sとその連携式（復習）

- 組替F/S
 - 組替C/S : $FCF_t = F_t + D_t = FCFL_t - \frac{t}{1-t}NFE_t + FCFE_t$
 - 組替B/S : $NOA_t = NFO_t + Y_t$
 - 組替P/L : $OX_t - NFE_t = X_t$
- 組替F/Sの連携式
 - CSR : $Y_t + X_{t+1} - D_{t+1} = Y_{t+1}$
 - NOAR : $NFO_t + NFE_{t+1} - F_{t+1} = NFO_{t+1}$
 - NFOR : $NOA_t + OX_{t+1} - FCF_{t+1} = NOA_{t+1}$

1. FOモデル

1.2 残余事業利益モデル

- 残余事業利益モデル

- いくつかの仮定の下で次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[FCF_{t+i}]}{(1+r_{WACC})^i} = NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r_{WACC})^i} \quad (1)$$

- * $OX_{t+i}^a \equiv OX_{t+i} - r_{WACC}NOA_{t+i-1}$ は時点 $t+i$ の残余事業利益 (Residual Operating Income) と定義する。
- * (1) 式の右辺にしたがって事業価値 $VNOA_t$ を算定し、純金融負債 NFO_t を控除することで株主価値評価を行なうモデルを残余事業利益モデルと呼ぶ。
- * 以下では、割引率は $r_{WACC} = r$ と表す。なお、Feltham and Ohlson (1995) は割引率はすべて無リスク利子率と等しいと仮定している。

1. FOモデル

1.3 線形情報動学

- 残余事業利益 OX_{t+i}^a , 純事業資産 NOA_{t+i} , およびその他の情報 $v_{1,t+i}$, $v_{2,t+i}$ に関して, 次の時系列を仮定する。

$$OX_{t+i+1}^a = \omega_{11}OX_{t+i}^a + \omega_{12}NOA_{t+i} + v_{1,t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (2)$$

$$NOA_{t+i+1} = \omega_{22}NOA_{t+i} + v_{2,t+i} + \varepsilon_{2,t+i+1} \quad (3)$$

$$v_{1,t+i+1} = \gamma_1 v_{1,t+i} + \varepsilon_{3,t+i+1} \quad (4)$$

$$v_{2,t+i+1} = \gamma_2 v_{2,t+i} + \varepsilon_{4,t+i+1} \quad (5)$$

- $E_t[\varepsilon_{1,t+i+1}] = E_t[\varepsilon_{2,t+i+1}] = E_t[\varepsilon_{3,t+i+1}] = E_t[\varepsilon_{4,t+i+1}] = 0, i \geq 0$
- $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{22}, \gamma_1, \gamma_2$ は, $0 \leq \omega_{11} < 1, 0 \leq \omega_{12}, 1 \leq \omega_{22} < 1 + r, |\gamma_1| < 1, |\gamma_2| < 1$ を満たす定数で既知とする。
- この(2)式 - (5)式も線形情報動学 (Linear Information Dynamics) と呼ばれる。

1. FOモデル

1.4 FOモデルとは

- 組替F/Sの連携式を仮定し残余事業利益モデルが成立するとする。また(2)式－(5)式の線形情報動学を仮定する。このとき次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} V_t = & Y_t + \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} OX_t^a + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{22})(1+r-\omega_{11})} NOA_t \\ & + \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} v_{1t} \\ & + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{22})(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_2)} v_{2t} \end{aligned} \quad (6)$$

- － Y_t , OX_t^a , NOA_t , v_{1t} , v_{2t} という時点 t における情報のみで表されている。
- － (6)式は Feltham and Ohlson (1995, CAR) の命題3において示された式であり、この右辺にしたがって株主価値評価を行なうモデルをFOモデルと呼ぶ。

1. FOモデル

1.4 FOモデルとは

- FOモデルの特徴

$$OX_{t+i+1}^a = \omega_{11} OX_{t+i}^a + \omega_{12} NOA_{t+i} + v_{1,t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (2)$$

$$V_t = Y_t + \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} OX_t^a + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{22})(1+r-\omega_{11})} NOA_t + \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} v_{1t} + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{22})(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_2)} v_{2t} \quad (6)$$

- Ohlson モデルと異なる点として、(2)式の線形情報動学に表れているように、残余事業利益の源泉として純事業資産を追加している。
- $\omega_{12}(\geq 0)$ は現行の保守主義会計の下では、 $\omega_{12} > 0$ と想定されている。保守主義会計によって、純事業資産が時価よりも低く測定されていることが、残余事業利益の発生源泉となっていると考えている。このことから、 ω_{12} は保守主義の度合いを表すパラメータとされる。

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- Ohlsonモデルの導出方法(1)と同じ方法で導出する。
 - 後で説明する行列を用いた導出方法(2)の方法をすすめる。行列を用いない導出方法(1)では、導出過程が複雑になることを確認する意味はあると思うので残しておく。
- (3)式と(5)式のみ注目すると、Ohlsonモデルの導出(1)と同様にすれば、次式が成り立つ。

$$E_t[NOA_{t+i}] = \omega_{22}^i NOA_t + \frac{\gamma_2^i - \omega_{22}^i}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \quad (7)$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- i 期先の残余利益 X_{t+i}^a の期待値

$$\begin{aligned}
 E_t [OX_{t+i}^a] &= E_t[\omega_{11}OX_{t+i-1}^a + \omega_{12}NOA_{t+i-1} + v_{1,t+i-1}] \\
 &= \omega_{11}E_t[\omega_{11}OX_{t+i-2}^a + \omega_{12}NOA_{t+i-2} + v_{1,t+i-2}] + \omega_{12}E_t[NOA_{t+i-1}] + E_t[v_{1,t+i-1}] \\
 &= \omega_{11}^2 E_t[OX_{t+i-2}^a] + \omega_{12} \sum_{j=1}^2 \omega_{11}^{j-1} E_t[NOA_{t+i-j}] + \sum_{j=1}^2 \omega_{11}^{j-1} E_t[v_{1,t+i-j}] \\
 &= \omega_{11}^i OX_t^a + \omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} E_t[NOA_{t+i-j}] + \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} E_t[v_{1,t+i-j}] \\
 &= \omega_{11}^i OX_t^a + \omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \left(\omega_{22}^{i-j} NOA_t + \frac{\gamma_2^{i-j} - \omega_{22}^{i-j}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \right) + \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \gamma_1^{i-j} v_{1t} \\
 &= \omega_{11}^i OX_t^a + \omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \omega_{22}^{i-j} NOA_t + \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \gamma_1^{i-j} v_{1t} + \omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \frac{\gamma_2^{i-j} - \omega_{22}^{i-j}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t}
 \end{aligned}$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- i 期先の残余事業利益 OX_{t+i}^a の期待値

- $\omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \omega_{22}^{i-j} NOA_t$ の項

$$\omega_{12} \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t$$

- $\sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \gamma_1^{i-j} v_{1t}$ の項

$$\frac{\gamma_1^i - \omega_{11}^i}{\gamma_1 - \omega_{11}} v_{1t}$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- i 期先の残余事業利益 OX_{t+i}^a の期待値

– $\omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \frac{\gamma_2^{i-j} - \omega_{22}^{i-j}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t}$ の項

$$\begin{aligned}
 \omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \frac{\gamma_2^{i-j} - \omega_{22}^{i-j}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} &= \left(\sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \gamma_2^{i-j} - \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \omega_{22}^{i-j} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\
 &= \left(\frac{\gamma_2^{i-1} (1 - (\omega_{11} \gamma_2^{-1})^i)}{1 - \omega_{11} \gamma_2^{-1}} - \frac{\omega_{22}^{i-1} (1 - (\omega_{11} \omega_{22}^{-1})^i)}{1 - \omega_{11} \omega_{22}^{-1}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\
 &= \left(\frac{\gamma_2^i (1 - \omega_{11}^i \gamma_2^{-i})}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \frac{\omega_{22}^i (1 - \omega_{11}^i \omega_{22}^{-i})}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\
 &= \left(\frac{\gamma_2^i - \omega_{11}^i}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t}
 \end{aligned}$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- それぞれの各項を代入すると、 i 期先の残余事業利益 OX_{t+i}^a の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E_t[OX_{t+i}^a] &= \omega_{11}^i OX_t^a + \omega_{12} \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \omega_{22}^{i-j} NOA_t + \sum_{j=1}^i \omega_{11}^{j-1} \gamma_1^{i-j} v_{1t} + \omega_{12} \sum_{i=1}^j \omega_{11}^{j-1} \frac{\gamma_2^{i-j} - \omega_{22}^{i-j}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\ &= \omega_{11}^i OX_t^a + \omega_{12} \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t + \frac{\gamma_1^i - \omega_{11}^i}{\gamma_1 - \omega_{11}} v_{1t} + \left(\frac{\gamma_2^i - \omega_{11}^i}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \end{aligned}$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- このとき、残余事業利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} VNOA_t &= NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \\ &= NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{11}^i}{(1+r)^i} OX_t^a + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \omega_{12} \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \frac{\gamma_1^i - \omega_{11}^i}{\gamma_1 - \omega_{11}} v_{1t} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \left(\frac{\gamma_2^i - \omega_{11}^i}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \end{aligned} \quad (8)$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- (8) 式の各項
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{11}^i}{(1+r)^i} OX_t^a$ の項

$$\frac{\frac{\omega_{11}}{1+r}}{1 - \frac{\omega_{11}}{1+r}} OX_t^a = \frac{\omega_{11}}{1+r - \omega_{11}} OX_t^a \quad (9)$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- (8)式の各項

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \omega_{12} \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t \text{ の項}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\frac{\omega_{22}}{1+r}}{1 - \frac{\omega_{22}}{1+r}} - \frac{\frac{\omega_{11}}{1+r}}{1 - \frac{\omega_{11}}{1+r}} \right) \frac{\omega_{12}}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t \\ &= \left(\frac{\omega_{22}}{1+r - \omega_{22}} - \frac{\omega_{11}}{1+r - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t \end{aligned} \quad (10')$$

$$= \frac{\omega_{12}(1+r)}{(1+r - \omega_{11})(1+r - \omega_{22})} NOA_t \quad (10)$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \frac{\gamma_1^i - \omega_{11}^i}{\gamma_1 - \omega_{11}} v_{1t} \text{ の項}$$

$$\frac{1+r}{(1+r - \omega_{11})(1+r - \gamma_1)} v_{1t} \quad (11)$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- (8) 式の各項

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \left(\frac{\gamma_2^i - \omega_{11}^i}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \text{ の項}$$

* (10') 式の計算結果を利用する。

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\gamma_2}{1+r-\gamma_2} - \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} \right) \frac{1}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \left(\frac{\omega_{22}}{1+r-\omega_{22}} - \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} \right) \frac{1}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\ &= \left(\frac{1}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_2)} - \frac{1}{(1+r-\omega_{22})(1+r-\omega_{11})} \right) \frac{(1+r)\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\ &= \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} v_{2t} \end{aligned} \tag{12}$$

2. FOモデルの導出

2.1 導出方法(1)

- (9)式－(12)式を(8)式に代入すると、残余事業利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned}
 VNOA_t &= NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{11}^i OX_t^a}{(1+r)^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \omega_{12} \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \frac{\gamma_1^i - \omega_{11}^i}{\gamma_1 - \omega_{11}} v_{1t} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \left(\frac{\gamma_2^i - \omega_{11}^i}{\gamma_2 - \omega_{11}} - \frac{\omega_{22}^i - \omega_{11}^i}{\omega_{22} - \omega_{11}} \right) \frac{\omega_{12}}{\gamma_2 - \omega_{22}} v_{2t} \\
 &= NOA_t + \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} OX_t^a + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})} NOA_t \\
 &\quad + \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} v_{1t} \\
 &\quad + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} v_{2t}
 \end{aligned}$$

- － 金融負債の簿価と価値は等しいと仮定していることから、 $VNOA_t = NFO_t + V_t$ と $NOA_t = NFO_t + Y_t$ を代入すれば、FOモデルが得られる。

2. FOモデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- 線形情報動学は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} OX_{t+i+1}^a \\ NOA_{t+i+1} \\ v_{1,t+i+1} \\ v_{2,t+i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & 1 & 0 \\ 0 & \omega_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OX_{t+i}^a \\ NOA_{t+i} \\ v_{1,t+i} \\ v_{2,t+i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \\ \varepsilon_{3,t+i+1} \\ \varepsilon_{4,t+i+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$- \mathbf{z}_{t+i} = \begin{pmatrix} OX_{t+i}^a \\ NOA_{t+i} \\ v_{1,t+i} \\ v_{2,t+i} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & 1 & 0 \\ 0 & \omega_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+i+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \\ \varepsilon_{3,t+i+1} \\ \varepsilon_{4,t+i+1} \end{pmatrix} \text{とす}$$

る。このとき、線形情報動学は次のように表すことができる。

$$\mathbf{z}_{t+i+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{t+i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+i+1} \quad (14)$$

2. FOモデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- 将来の z_{t+i} の期待値について，次式が成り立つ。

$$E_t[z_{t+i}] = A^i z_t \quad (15)$$

- また， $i \rightarrow \infty$ のとき $\frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} \rightarrow 0$ を仮定すると，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} &= \frac{1}{1+r} A z_t + \frac{1}{(1+r)^2} A^2 z_t + \frac{1}{(1+r)^3} A^3 z_t + \dots \\ &= [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} = \mathbf{e1}' [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \quad (17)$$

$$\text{where } \mathbf{e1}' = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

2. FOモデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- $[(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$ を mathematica を利用して計算する。

$$\text{In}[1] = W = \{\{\omega_{11}, \omega_{12}, 1, 0\}, \{0, \omega_{22}, 0, 1\}, \{0, 0, \gamma_1, 0\}, \{0, 0, 0, \gamma_2\}\}$$

$$\text{Out}[1] = \{\{\omega_{11}, \omega_{12}, 1, 0\}, \{0, \omega_{22}, 0, 1\}, \{0, 0, \gamma_1, 0\}, \{0, 0, 0, \gamma_2\}\}$$

$$\text{In}[2] = \mathbf{I} = \text{IdentityMatrix}[4]$$

$$\text{Out}[2] = \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}\}$$

$$\text{In}[3] = \text{INV} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[(1+r)\mathbf{I} - W]]$$

$$\text{Out}[3] =$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{1+r-\omega_{11}}, \frac{\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})}, \frac{1}{(1+r-\gamma_1)(1+r-\omega_{11})}, \frac{\omega_{12}}{(1+r-\gamma_2)(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})} \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{1+r-\omega_{22}}, 0, \frac{1}{(1+r-\gamma_2)(1+r-\omega_{22})} \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{1+r-\gamma_1}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{1+r-\gamma_2} \right\} \right\}$$

2. FOモデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- $[(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$ を mathematica を利用して計算する。(続き)

In[4] = Simplify[INV.W]

Out[4] =

$$\left\{ \left\{ \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}}, \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})}, \frac{1+r}{(1+r-\gamma_1)(1+r-\omega_{11})}, \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\gamma_2)(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})} \right\}, \left\{ 0, \frac{\omega_{22}}{1+r-\omega_{22}}, 0, \frac{1+r}{(1+r-\gamma_2)(1+r-\omega_{22})} \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{\gamma_1}{1+r-\gamma_1}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, \frac{\gamma_2}{1+r-\gamma_2} \right\} \right\}$$

2. FOモデルの導出

2.2 導出方法(2)：行列を用いた方法

- このとき、残余事業利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned}
 VNOA_t &= NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \\
 &= NOA_t + \mathbf{e1}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{z}_t \\
 &= NOA_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} & \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})} & \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} & \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} \\ 0 & \frac{\omega_{22}}{1+r-\omega_{22}} & 0 & \frac{1+r}{(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_1}{1+r-\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_2}{1+r-\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OX_t^a \\ NOA_t \\ v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} \\
 &= NOA_t + \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} OX_t^a + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})} NOA_t + \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} v_{1t} \\
 &\quad + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} v_{2t}
 \end{aligned}$$

[証明終]

3. FOモデルの展開

- Liu and Ohlson (2000, JAAF)
 - Ohlsonモデルにおけるその他の情報 v_t の別表現を用いたOhlson (2001)モデルと同様に, FOモデルにおけるその他の情報 v_{1t} , v_{2t} の別表現を用いたモデルを示した。
 - * Callen and Segal (2005)において, このモデルに基づいた実証研究が行なわれている。
 - * 日本のデータでも, 太田・斉藤・吉野 (2015)において実証研究が行なわれている。

3. FOモデルの展開

- 導出

- 線形情報動学

$$OX_{t+i+1}^a = \omega_{11}OX_{t+i}^a + \omega_{12}NOA_{t+i} + v_{1,t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (18)$$

$$NOA_{t+i+1} = \omega_{22}NOA_{t+i} + v_{2,t+i} + \varepsilon_{2,t+i+1} \quad (19)$$

- $i = 0$ として (18) 式と (19) 式の期待値をとる。

$$\begin{aligned} E_t [OX_{t+1}^a] &= \omega_{11}OX_t^a + \omega_{12}NOA_t + v_{1t} \\ \iff v_{1t} &= E_t [OX_{t+1}^a] - \omega_{11}OX_t^a - \omega_{12}NOA_t \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_t [NOA_{t+1}] &= \omega_{22}NOA_t + v_{2t} \\ \iff v_{2t} &= E_t [NOA_{t+1}] - \omega_{22}NOA_t \end{aligned} \quad (21)$$

3. FOモデルの展開

- 導出

- (20)式と(21)式を(6)式のFOモデルに代入する。

$$\begin{aligned} V_t = & Y_t + \frac{\omega_{11}}{1+r-\omega_{11}} OX_t^a + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})} NOA_t \\ & + \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} \left(E_t [OX_{t+1}^a] - \omega_{11} OX_t^a - \omega_{12} NOA_t \right) \\ & + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} \left(E_t [NOA_{t+1}] - \omega_{22} NOA_t \right) \end{aligned}$$

3. FOモデルの展開

- 導出

- 整理すると次式になる。

$$\begin{aligned} V_t = & Y_t + \frac{-\omega_{11}\gamma_1}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} OX_t^a \\ & + \frac{1+r}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\gamma_1)} E_t [OX_{t+1}^a] \\ & + \frac{(1+r)\omega_{12}(\omega_{22}(\gamma_1-\gamma_2) + \gamma_1\gamma_2 - (1+r)\gamma_1)}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_1)(1+r-\gamma_2)} NOA_t \\ & + \frac{(1+r)\omega_{12}}{(1+r-\omega_{11})(1+r-\omega_{22})(1+r-\gamma_2)} E_t [NOA_{t+1}] \quad (22) \end{aligned}$$

* OX_t^a , $E_t [OX_{t+1}^a]$, NOA_t , $E_t [NOA_{t+1}]$ の係数をそれぞれ, k_1, k_2, k_3, k_4 とする。

* この(22)式は, Liu and Ohlson (2001)の(2)式に対応している。

3. FOモデルの展開

- 導出

- さらに残余事業利益を展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} V_t &= Y_t + k_1 OX_t^a + k_2 E_t [OX_{t+1}^a] + k_3 NOA_t + k_4 E_t [NOA_{t+1}] \\ &= Y_t + k_1 (OX_t - r(NOA_t - OX_t + FCF_t)) \\ &\quad + k_2 (E_t[OX_{t+1}] - rNOA_t) + k_3 NOA_t + k_4 E_t [NOA_{t+1}] \\ &= Y_t + rk_1 \left(\frac{1+r}{r} OX_t - FCF_t \right) + rk_2 \frac{E_t [OX_{t+1}]}{r} \\ &\quad + (k_3 - r(k_1 + k_2))NOA_t + k_4 E_t [NOA_{t+1}] \end{aligned} \tag{23}$$

* この(23)式は, Liu and Ohlson (2001)の(4)式に対応している。

3. FOモデルの展開

- したがって、FOモデルは次のように表すこともできる。

$$V_t = Y_t + \theta_1 \left(\frac{1+r}{r} OX_t - FCF_t \right) + \theta_2 \frac{E_t[OX_{t+1}]}{r} + \theta_3 NOA_t + \theta_4 E_t[NOA_{t+1}]$$

$$\theta_1 \equiv rk_1, \theta_2 \equiv rk_2, \theta_3 \equiv k_3 - r(k_1 + k_2), \theta_4 \equiv k_4$$

- さらに、 $E_t[\Delta OX_{t+1}] \equiv E_t[OX_{t+1}] - (1+r)OX_t + rFCF_t$, $E_t[\Delta NOA_{t+1}] \equiv E_t[NOA_{t+1}] - NOA_t$ を用いて書き換えると次のようになる。

$$V_t = -NFO_t + \lambda_1 E_t[\Delta OX_{t+1}] + \lambda_2 E_t[OX_{t+1}] + \lambda_3 NOA_t + \lambda_4 E_t[\Delta NOA_{t+1}] \quad (24)$$

$$\lambda_1 \equiv -\frac{\theta_1}{r}, \lambda_2 \equiv \frac{\theta_1 + \theta_2}{r}, \lambda_3 \equiv 1 + \theta_3 + \theta_4, \lambda_4 \equiv k_4$$

- この(24)式は、Liu and Ohlson (2001)の(5)式に対応している。
- 実証分析の際には、(24)式の両辺を NOA_t で割るなどすることが一般的である。Callen and Segal (2005), 太田・斉藤・吉野 (2015)など参照。

4. FO (1995)における残余事業利益モデル

- Feltham and Ohlson (1995)では次の関係を仮定している。

$$rNFO_{t+i} = NFE_{t+i+1} \quad (25)$$

- つまり、時点 t ($t+1$ 期の期首)の純金融負債に利子率 r を乗じた額が $t+1$ 期の純金融費用である。
- 将来残余利益に対応する将来残余純金融費用($NFE_{t+i+1} - rNFO_{t+i}$)はゼロと仮定しているとも言える。
- 企業の立場から純金融負債の価値 $VNFO_t$ を求めると次のようになる。

$$VNFO_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[F_{t+i}]}{(1+r)^i} = NFO_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[NFE_{t+i} - rNFO_{t+i-1}]}{(1+r)^i} \quad (26)$$

- * 二つ目の等号は、純金融負債関係(NFOR)を用いて、残余利益モデルの導出と全く同様にすれば成り立つ。
- * (25)式を(26)式に代入すれば $VNFO_t = NFO_t$ となる。したがって、(25)式は純金融負債の時価と簿価が等しいことを含意する。

4. FO (1995)における残余事業利益モデル

- このことと、利子率をすべて r と仮定していることから、次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}OX_{t+1}^a &\equiv OX_{t+1} - rNOA_t \\ &= X_{t+1} + NFE_{t+1} - r(Y_t + NFO_{t+1}) \\ &= X_{t+1} - rY_t + NFE_{t+1} - rNFO_{t+1} \\ &= X_{t+1} - rY_t \\ &\equiv X_{t+1}^a\end{aligned}\tag{27}$$

- つまり、残余事業利益と残余利益は等しくなる。

4. FO (1995)における残余事業利益モデル

- 金融負債の価値と簿価が等しく，残余事業利益と残余利益は一致することから，次の3つの関係が成立する。

$$V_t = -NFO_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[FCF_{t+i}]}{(1+r)^i} \quad (28)$$

$$V_t = Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \quad (29)$$

$$V_t = Y_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[X_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \quad (30)$$

- これはFeltham and Ohlson (1995)の命題1である。

5. ここまでのまとめ

- 企業価値評価モデル

	組替 C/S ベース	組替 B/S ベース		組替 P/L ベース	
		CSR なし	+CSR	CSR なし	+CSR
株主資本型	DDM	ABG	残余利益 (=RIM) GRIM Ohlson	AEG PEG OJ	残余利益成長 OJ + CSR
純事業資産型 (総資産型)	DCF 法		残余事業利益 FO		残余事業利益成長

[枚数調整]

TOPIC #3

FO96 モデル

- Feltham, G. A., and J. A. Ohlson, 1996. “Uncertainty Resolution and the Theory of Depreciation Measurement,” *Journal of Accounting Research* 34(2), pp. 209–234.
- Begley, J., and G. A. Feltham, 2002. “The Relation between Market Values, Earnings Forecasts, and Reported Earnings,” *Contemporary Accounting Research* 19(1), pp. 1–48.

1. FO96におけるDCF法

1.1 設定

- キャッシュ・インフロー C_{t+i} , 投資 I_{t+i} に関して, 次の時系列を仮定する。

$$C_{t+i+1} = \gamma C_{t+i} + \kappa I_{t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (1)$$

$$I_{t+i+1} = \omega I_{t+i} + \varepsilon_{2,t+i+1} \quad (2)$$

- $E_t[\varepsilon_{1,t+i+1}] = E_t[\varepsilon_{2,t+i+1}] = 0, i \geq 0$
- γ, κ, ω は, $0 < \kappa, 0 \leq \gamma < 1, 0 \leq \omega < 1 + r$ を満たす定数で既知とする。

1. FO96におけるDCF法

1.2 FO96におけるDCF法とは

- FO96におけるDCF法

- いくつかの仮定の下で次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[FCF_{t+i}]}{(1+r_{WACC})^i} = \Phi E_t[C_{t+1}] + \beta E_t[I_{t+1}] = \Phi[\gamma C_t + \kappa I_t] + \beta[\omega C_t] \quad (3)$$

$$\Phi \equiv \frac{1}{1+r-\gamma}, \quad \beta \equiv (\Phi\kappa - 1) \frac{1}{1+r-\omega}$$

- * (3)式は Feltham and Ohlson (1996, JAR) の命題1において示された式であり, FO96モデルの1つである。
- * Feltham and Ohlson (1996, JAR) では純金融負債は存在しておらず, このため純事業資産の価値と株主価値は等しくなっている。
- * 以下では, 割引率は $r_{WACC} = r$ と表す。Feltham and Ohlson (1996) では割引率はすべて無リスク利子率と等しいと仮定されている。

1. FO96におけるDCF法

1.3 FO96におけるDCF法の導出

- 変数の時系列（線形情報動学）は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} C_{t+i+1} \\ I_{t+i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \kappa \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t+i} \\ I_{t+i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

- $z_{t+i} = \begin{pmatrix} C_{t+i} \\ I_{t+i} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \gamma & \kappa \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{t+i+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix}$ とする。このとき、線形情報動学は次のように表すことができる。

$$z_{t+i+1} = Az_{t+i} + \varepsilon_{t+i+1} \quad (5)$$

1. FO96におけるDCF法

1.3 FO96におけるDCF法の導出

- 将来の z_{t+i} の期待値について，次式が成り立つ。

$$E_t[z_{t+i}] = A^i z_t \quad (6)$$

- また， $i \rightarrow \infty$ のとき $\frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} \rightarrow 0$ を仮定すると，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} &= \frac{1}{1+r} A z_t + \frac{1}{(1+r)^2} A^2 z_t + \frac{1}{(1+r)^3} A^3 z_t + \dots \\ &= [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[FCF_{t+i}]}{(1+r)^i} = \left(e1' [(1+r)I - A]^{-1} A - e2' [(1+r)I - A]^{-1} A \right) z_t \quad (8)$$

$$\text{where } e1' = (1 \ 0), \ e2' = (0 \ 1)$$

1. FO96におけるDCF法

1.3 FO96におけるDCF法の導出

- $[(1 + r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$ を mathematica を利用して計算する。

$$\text{In}[1] = W = \{\{\gamma, \kappa\}, \{0, \omega\}\}$$

$$\text{Out}[1] = \{\{\gamma, \kappa\}, \{0, \omega\}\}$$

$$\text{In}[2] = \mathbf{II} = \text{IdentityMatrix}[2]$$

$$\text{Out}[2] = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$$

$$\text{In}[3] = \text{INV} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[(1 + r)\mathbf{II} - W]]$$

$$\text{Out}[3] = \left\{ \left\{ \frac{1}{1 + r - \gamma}, \frac{\kappa}{(1 + r - \gamma)(1 + r - \omega)} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[4] = \mathbf{c} = \text{Simplify}[\text{INV}.W]$$

$$\text{Out}[4] = \left\{ \left\{ \frac{\gamma}{1 + r - \gamma}, \frac{(1 + r)\kappa}{(1 + r - \gamma)(1 + r - \omega)} \right\}, \left\{ 0, \frac{\omega}{1 + r - \omega} \right\} \right\}$$

1. FO96におけるDCF法

1.3 FO96におけるDCF法の導出

- このとき、FCF法による事業価値は次のように計算される。

$$\begin{aligned} VNOA_t &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t [FCF_{t+i}]}{(1+r)^i} \\ &= (\mathbf{e1}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{e2}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}) z_t \end{aligned}$$

– mathematica を利用して計算する。

In[5] = e1 = {1, 0}

Out[5] = {1, 0}

In[6] = e2 = {0, 1}

Out[6] = {0, 1}

In[7] = FullSimplify[e1.c - e2.c]

Out[7] = $\left\{ \frac{\gamma}{1+r-\gamma}, \frac{(1+r)\kappa + (-1-r+\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \right\}$

1. FO96におけるDCF法

1.3 FO96におけるDCF法の導出

- 以上から、FCF法による事業価値は次のように計算される。

$$\begin{aligned} VNOA_t &= (e\mathbf{1}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A} - e\mathbf{2}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{z}_t \\ &= \left(\frac{\gamma}{1+r-\gamma} \quad \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \right) \mathbf{z}_t \\ &= \left(\frac{\gamma}{1+r-\gamma} \quad \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \right) \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{\gamma}{1+r-\gamma} C_t + \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} I_t \end{aligned} \quad \text{[証明終]} \quad (9)$$

- 参考：Feltham and Ohlson (1996, JAR) の(1)式と等しいことを mathematica を利用して確認する。

$$\text{In[8]} = \text{FullSimplify} \left[\frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} - \left(\kappa \frac{1}{1+r-\gamma} + \frac{\kappa \frac{1}{1+r-\gamma} - 1}{1+r-\omega} \omega \right) \right]$$

$$\text{Out[8]} = 0$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.1 追加設定

- 事業利益： $OX_{t+1} = C_{t+1} - DEP_{t+1}$
 - ここで $DEP_{t+1} = (1 - \delta)NOA_t$ を仮定する。 δ は減価償却を決めるパラメータであり、 $0 \leq \delta < 1$ とする。
 - 事業利益： $OX_{t+1} = \gamma C_{t+1} + \kappa I_{t+1} - (1 - \delta)NOA_t + \varepsilon_{1,t+1}$
 - 残余事業利益： $OX_{t+1}^a = \gamma C_t + \kappa I_t - (1 - \delta)NOA_t + \varepsilon_{1,t+1} - rNOA_t = \gamma C_t + \kappa I_t - (1 + r - \delta)NOA_t + \varepsilon_{1,t+1}$
- 純事業資産関係： $NOA_{t+1} = NOA_t + OX_{t+1} - FCF_{t+1}$
 - $NOA_{t+1} = NOA_t + C_{t+1} - DEP_{t+1} - (C_{t+1} - I_{t+1}) = NOA_t + I_{t+1} - DEP_{t+1}$
 - $NOA_{t+1} = NOA_t + \omega I_t + \varepsilon_{2,t+1} - (1 - \delta)NOA_t = \omega I_t + \delta NOA_t + \varepsilon_{2,t+1}$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.1 追加設定

- 以上から、キャッシュ・インフロー C_{t+i} 、投資 I_{t+i} 、残余事業利益 OX_{t+i}^a 、純事業資産 NOA_{t+i} に関して、次の時系列を仮定することになる。

$$C_{t+i+1} = \gamma C_{t+i} + \kappa I_{t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (1)$$

$$I_{t+i+1} = \omega I_{t+i} + \varepsilon_{2,t+i+1} \quad (2)$$

$$OX_{t+i+1}^a = \gamma C_{t+i} + \kappa I_{t+i} - (1 + r - \delta)NOA_{t+i} + \varepsilon_{1,t+i+1} \quad (10)$$

$$NOA_{t+i+1} = \omega I_{t+i} + \delta NOA_{t+i} + \varepsilon_{2,t+i+1} \quad (11)$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.2 FO96における残余事業利益モデル(1)とは

- FO96における残余事業利益モデル(1)
 - いくつかの仮定の下で次式が成立する。

$$\begin{aligned}NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r_{WACC})^i} &= \Phi E_t[C_{t+1}] + \beta E_t[I_{t+1}] \\ &= \Phi[\gamma C_t + \kappa I_t] + \beta[\omega C_t] \quad (12) \\ \Phi &\equiv \frac{1}{1+r-\gamma}, \quad \beta \equiv (\Phi\kappa - 1) \frac{1}{1+r-\omega}\end{aligned}$$

- * (12)式の右辺はFO96におけるDCF法に等しい。つまり、FO96における残余事業利益モデル(1)とは、(12)式の左辺を計算することで、FO96におけるDCF法を導出できることを意味する。

2. FO96における残余事業利益モデル

2.3 FO96における残余事業利益モデル(1)の導出

- 変数の時系列（線形情報動学）は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} C_{t+i+1} \\ I_{t+i+1} \\ OX_{t+i+1}^a \\ NOA_{t+i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ \gamma & \kappa & 0 & -(1+r-\delta) \\ 0 & \omega & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{t+i} \\ I_{t+i} \\ OX_{t+i}^a \\ NOA_{t+i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \\ \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$- \mathbf{z}_{t+i} = \begin{pmatrix} C_{t+i} \\ I_{t+i} \\ OX_{t+i}^a \\ NOA_{t+i} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ \gamma & \kappa & 0 & -(1+r-\delta) \\ 0 & \omega & 0 & \delta \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+i+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \\ \varepsilon_{1,t+i+1} \\ \varepsilon_{2,t+i+1} \end{pmatrix} \text{と}$$

する。このとき、線形情報動学は次のように表すことができる。

$$\mathbf{z}_{t+i+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{t+i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+i+1} \quad (14)$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.3 FO96における残余事業利益モデル(1)の導出

- 将来の z_{t+i} の期待値について，次式が成り立つ。

$$E_t[z_{t+i}] = A^i z_t \quad (15)$$

- また， $i \rightarrow \infty$ のとき $\frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} \rightarrow 0$ を仮定すると，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[z_{t+i}]}{(1+r)^i} &= \frac{1}{1+r} A z_t + \frac{1}{(1+r)^2} A^2 z_t + \frac{1}{(1+r)^3} A^3 z_t + \dots \\ &= [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r)^i} = e3' [(1+r)I - A]^{-1} A z_t \quad (17)$$

$$\text{where } e3' = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.3 FO96における残余事業利益モデル(1)の導出

- $[(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$ を mathematica を利用して計算する。

$$\text{In}[1] = W = \{\{\gamma, \kappa, 0, 0\}, \{0, \omega, 0, 0\}, \{\gamma, \kappa, 0, -(1+r-\delta)\}, \{0, \omega, 0, \delta\}\}$$

$$\text{Out}[1] = \{\{\gamma, \kappa, 0, 0\}, \{0, \omega, 0, 0\}, \{\gamma, \kappa, 0, -1-r+\delta\}, \{0, \omega, 0, \delta\}\}$$

$$\text{In}[2] = \mathbf{I} = \text{IdentityMatrix}[4]$$

$$\text{Out}[2] = \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1\}\}$$

$$\text{In}[3] = \text{INV} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[(1+r)\mathbf{I} - W]]$$

$$\text{Out}[3] =$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{1+r-\gamma}, \frac{\kappa}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{1+r-\omega}, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\gamma}{(1+r)(1+r-\gamma)}, \frac{1}{1+r} + \frac{-1-r+\gamma+\kappa}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, \frac{1}{1+r}, -\frac{1}{1+r} \right\}, \left\{ 0, \frac{\omega}{(1+r-\delta)(1+r-\omega)}, 0, \frac{1}{1+r-\delta} \right\} \right\}$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.3 FO96における残余事業利益モデル(1)の導出

- $[(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$ を mathematica を利用して計算する。(続き)

In[4] = c = Simplify[INV.W]

Out[4] =

$$\left\{ \left\{ \frac{\gamma}{1+r-\gamma}, \frac{(1+r)\kappa}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{\omega}{1+r-\omega}, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\gamma}{1+r-\gamma}, \frac{(1+r)\kappa + (-1-r+\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, 0, -1 \right\}, \left\{ 0, \frac{(1+r)\omega}{(1+r-\delta)(1+r-\omega)}, 0, \frac{\delta}{1+r-\delta} \right\} \right\}$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.3 FO96における残余事業利益モデル(1)の導出

- このとき，残余事業利益モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned}VNOA_t &= NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r)^i} \\ &= NOA_t + \mathbf{e3}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A} \mathbf{z}_t\end{aligned}$$

- mathematica を利用して計算する。

$$\text{In}[5] = \text{e3} = \{0, 0, 1, 0\}$$

$$\text{Out}[5] = \{0, 0, 1, 0\}$$

$$\text{In}[6] = \text{FullSimplify}[\text{e3.c}]$$

$$\text{Out}[6] = \left\{ \frac{\gamma}{1+r-\gamma}, \frac{(1+r)\kappa + (-1-r+\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)}, 0, -1 \right\}$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.3 FO96における残余事業利益モデル(1)の導出

- 以上から、FCF法による事業価値は次のように計算される。

$$\begin{aligned}VNOA_t &= NOA_t + e\mathbf{3}' [(1+r)\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}z_t \\ &= NOA_t + \left(\frac{\gamma}{1+r-\gamma} \quad \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \quad 0 \quad -1 \right) z_t \\ &= NOA_t + \left(\frac{\gamma}{1+r-\gamma} \quad \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} \quad 0 \quad -1 \right) \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ OX_t^a \\ NOA_t \end{pmatrix} \\ &= NOA_t + \frac{\gamma}{1+r-\gamma} C_t + \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} I_t - NOA_t \\ &= \frac{\gamma}{1+r-\gamma} C_t + \frac{(1+r)\kappa - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} I_t\end{aligned}$$

[証明終]

2. FO96における残余事業利益モデル

2.4 FO96における残余事業利益モデル(2)とは

- FO96における残余事業利益モデル(2)
 - いくつかの仮定の下で次式が成立する。

$$NOA_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[OX_{t+i}^a]}{(1+r_{WACC})^i} = NOA_t + \alpha_1 OX_t^a + \alpha_2 NOA_{t-1} + \alpha_3 I_t \quad (18)$$

$$\alpha_1 \equiv \Phi\gamma, \quad \alpha_2 = \Phi(1+r)(\gamma-\delta), \quad \alpha_3 = (\Phi\kappa-1)\frac{1+r}{1+r-\omega}$$

- * (18)式はFeltham and Ohlson (1996, JAR)の命題2において示された式であり, FO96モデルの1つである。

2. FO96における残余事業利益モデル

2.5 FO96における残余事業利益モデル(2)の導出

- (18)式の右辺を変形していく。

$$\begin{aligned} & NOA_t + \Phi\gamma OX_t^a + \Phi(1+r)(\gamma - \delta)NOA_{t-1} + (\Phi\kappa - 1)\frac{1+r}{1+r-\omega}I_t \\ &= \delta NOA_{t-1} + I_t + \frac{\gamma}{1+r-\gamma}(C_t - (1+r-\delta)NOA_{t-1}) \\ & \quad + \frac{(1+r)(\gamma - \delta)}{1+r-\gamma}NOA_{t-1} + \left(\frac{\kappa}{1+r-\gamma} - 1\right)\frac{1+r}{1+r-\omega}I_t \end{aligned}$$

- NOA_{t-1} の項を整理する。

$$\begin{aligned} & \delta + \frac{\gamma}{1+r-\gamma}(-(1+r-\delta)) + \frac{(1+r)(\gamma - \delta)}{1+r-\gamma} \\ &= \delta + \frac{\gamma\delta}{1+r-\gamma} + \frac{-(1+r)\delta}{1+r-\gamma} = \delta - \delta = 0 \end{aligned}$$

2. FO96における残余事業利益モデル

2.5 FO96における残余事業利益モデル(2)の導出

- よって、(18)式の右辺は次のようになる。

$$\begin{aligned} & I_t + \frac{\gamma}{1+r-\gamma}C_t + \left(\frac{\kappa}{1+r-\gamma} - 1 \right) \frac{1+r}{1+r-\omega} I_t \\ &= \frac{\gamma}{1+r-\gamma}C_t + \left(\frac{\kappa}{1+r-\gamma} \frac{1+r}{1+r-\omega} - \frac{1+r}{1+r-\omega} + 1 \right) I_t \\ &= \frac{\gamma}{1+r-\gamma}C_t + \left(\frac{(1+r)\kappa}{1+r-\gamma} - \omega \right) \frac{1}{1+r-\omega} I_t \\ &= \frac{\gamma}{1+r-\gamma}C_t + \frac{\kappa(1+r) - (1+r-\gamma)\omega}{(1+r-\gamma)(1+r-\omega)} I_t \end{aligned}$$

[証明終]

- これは(9)式に等しい。

3. FO96モデルの展開

- Begley and Feltham (2002, CAR)
 - Ohlsonモデルにおけるその他の情報 v_t の別表現を用いたOhlson (2001)モデル, およびFOモデルにおけるその他の情報 v_{1t}, v_{2t} の別表現を用いたLiu and Ohlson (2000, JAAF)のモデルと同様に, FO96モデルにおいてその他の情報を用いないモデルを示した。
 - * 注: このスライドでは, その他の情報の入ったFO96モデル自体は説明していない。
 - * 日本のデータを用いた検証は, 私の知る限り, 存在していない。

4. ここまでのまとめ

- 企業価値評価モデル

	組替 C/S ベース	組替 B/S ベース		組替 P/L ベース	
		CSR なし	+CSR	CSR なし	+CSR
株主資本型	DDM	ABG	残余利益 (=RIM) GRIM Ohlson	AEG PEG OJ	残余利益成長 OJ + CSR
純事業資産型 (総資産型)	DCF 法		残余事業利益 FO FO96		残余事業利益成長