

2001 年度 学部 エコノメトリックス

第2回宿題 (提出期限: 2001 年 6 月 27 日 (水) 授業終了時)

解答上の注意: ①自分自身で解くこと。**②解答用紙は A4 サイズに限る。(ホチキス等で留めること)**重回帰モデルの行列表現 $\underset{n \times 1}{\mathbf{y}} = \underset{n \times k}{\mathbf{X}} \underset{k \times 1}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{n \times 1}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ について、次の問に答えなさい。

問 1. $\underset{n \times 1}{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\underset{n \times 2}{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} \end{pmatrix} = (\mathbf{1} \quad \tilde{\mathbf{x}}_1)$, $\underset{n \times 1}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, $\underset{2 \times 1}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ としたとき、 $\boldsymbol{\beta}$ の

最小 2 乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$ を計算し、単回帰モデルの最小 2 乗推定量の結果と比べなさい。ただし、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ をもつとき、

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \text{である。}$$

問 2. 問 1 で求めた $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ について、 $E\{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ を求めなさい。ここで、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n} \mathbf{1}' \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ である。

問 3. $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$ を証明しなさい。ただし、 $\mathbf{e} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ である。

問 4. 標本 $\left(\underset{n \times 1}{\mathbf{y}}, \underset{n \times k}{\mathbf{X}}\right)$ と標本以外の説明変数ベクトル $\underset{k \times 1}{\mathbf{x}}_{n+1} = (1 \quad x_{1,n+1} \quad \cdots \quad x_{k-1,n+1})'$ が与えられたとき、重回帰モデルによる y_{n+1} の予測量 $E(y_{n+1} | \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}, \mathbf{X})$ を求めなさい。また予測誤差および予測誤差の分散をベクトル・行列を用いて表現しなさい。

問 5. (オプション) 偏差 2 乗和 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ を、 $\mathbf{y}$, $\mathbf{I}$ (n 次の単位行列), $\mathbf{1}$ (全ての要素が 1 である列ベクトル) を用いて表現しなさい。

☆この宿題のねらい☆

①ベクトル・行列の演算に慣れる、②最小 2 乗推定量の行列表現を単回帰モデルのケースで確認する。