

2001 年度 エコノメトリックス

第 2 回宿題解答

問 1 .

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{1} & \mathbf{1}'\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\mathbf{1} & \mathbf{x}'\mathbf{x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'\mathbf{y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\bar{y} \sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i y_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ 。これより、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n \sum \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\bar{y}(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2) - \bar{x}(\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y})}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} = \bar{y} - \bar{x} \hat{\beta}_1$$

□

問 2 .

$\bar{\varepsilon}$ はスカラーであるから、転置しても同じ。従って $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}' = \frac{1}{n} \mathbf{1}' \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{n} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{1}$ となる。

この結果を用いると、

$$\begin{aligned}
E \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 - \beta_0 \\ \hat{\beta}_1 - \beta_1 \end{pmatrix} \bar{\varepsilon} \right\} &= \begin{pmatrix} E\{(\hat{\beta}_0 - \beta_0)\bar{\varepsilon}\} \\ E\{(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{\varepsilon}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \bar{\varepsilon}) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \bar{\varepsilon}) \end{pmatrix} \\
&= E \left\{ \frac{1}{n} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{1} \right\} = \frac{1}{n} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' E(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}') \mathbf{1} = \frac{\sigma^2}{n} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{1} \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n\bar{x} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2/n \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

問 3 .

$$\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')\mathbf{y} = \mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

□

2001 年度 エコノメトリックス

問 4 .

まず、重回帰モデルによって y_{n+1} を表すと、 $y_{n+1} = \mathbf{x}'_{n+1} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1}$ 。よって、 $\mathbf{x}_{n+1}$ を条件としたときの y_{n+1} の条件付期待値は $E(y_{n+1} | \mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{x}'_{n+1} \boldsymbol{\beta}$ となる。ところで、 $\boldsymbol{\beta}$ は未知。標本 $(\mathbf{y}, \mathbf{X})$ が与えられているから、 $\boldsymbol{\beta}$ を最小 2 乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$ で置き換えたものが、求める予測量となる。よって

$$\hat{y}_{n+1} \equiv E(y_{n+1} | \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \mathbf{x}'_{n+1} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

となる。いま $\hat{y}_{n+1}$ の予測誤差を $\hat{e}_{n+1}$ で表すことにすると、

$$\hat{e}_{n+1} \equiv y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = \mathbf{x}'_{n+1} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1} - \mathbf{x}'_{n+1} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \varepsilon_{n+1} - \mathbf{x}'_{n+1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$$

となり、その期待値は $E(\hat{e}_{n+1}) = E(\varepsilon_{n+1}) - \mathbf{x}'_{n+1} E(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = 0$ 。次に $\hat{e}_{n+1}$ の分散を求めると、

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{e}_{n+1}) &= E(\varepsilon_{n+1} - \mathbf{x}'_{n+1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}))(\varepsilon_{n+1} - \mathbf{x}'_{n+1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}))' \\ &= E(\varepsilon_{n+1}^2) + \mathbf{x}'_{n+1} E((\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})') \mathbf{x}_{n+1} \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \mathbf{x}'_{n+1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_{n+1} \end{aligned}$$

となる。なお、ここで σ^2 は ε_i ($i=1, \dots, n, n+1$) の分散を表している。 □

問 5 .

$y_i - \bar{y}$ ($i=1, \dots, n$) が第 i 要素となる $n \times 1$ の縦ベクトルを $\mathbf{y}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{1}$ でどのように表現できるかが、この問題のミソである。全ての要素が $\bar{y}$ である $n \times 1$ の縦ベクトルが、 $\bar{y}\mathbf{1}$ で表現できることを用いると、問題の縦ベクトルは

$$\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1} = \mathbf{y} - \mathbf{1}\bar{y} = \mathbf{y} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{y} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right) \mathbf{y}$$

で表すことができる。この $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right)$ は対称行列で、かつ、ベキ等行列になっている。したがって、

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \mathbf{y}' \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right)' \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right) \mathbf{y} = \mathbf{y}' \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right) \mathbf{y}$$

□

講評

残念なことに、1 ~ 2 割程度を受講生が他人の解答を丸写ししているようです。(怒)

問 2 と問 4 の出来が余りよくなかったです。問 2 は、 $\bar{\varepsilon}$ が (スカラーの) 確率変数であることに気づいていない人が多かった。問 4 については、(標本外) 予測の理解がきちんと出来ていなかったようです。参考書やノートで復習しておいてください。