

【不偏推定量であるが一致推定量でない例】

下の 2 つの例は、一致性がないことの証明に、推定量の漸近分散が 0 に収束しないことを用いている。

○ 例 1

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d. ($i=1, \dots, n$) であるとする。このとき、平均 μ の推定量として 1 番目の

標本と n 番目の標本の算術平均を採用する、すなわち $\tilde{\mu}_n = \frac{X_1 + X_n}{2}$ を考えることにしよう。

$\tilde{\mu}_n$ の期待値をとると、 $E(\tilde{\mu}_n) = \frac{E(X_1) + E(X_n)}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu$ となって、不偏性を満たしていることがわかる。一方、 $\tilde{\mu}_n$ の分散は

$$\text{Var}(\tilde{\mu}_n) = \frac{\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_n)}{4} = \frac{2\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$$

となって、標本数 n を増やしても $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\tilde{\mu}_n) = \frac{\sigma^2}{2} \neq 0$ となって、0 に収束しない。従って一致性を満たしていないことがわかる。 ■

(ちなみに、標本平均 $\hat{\mu}_n = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ を採用すると、 $E(\hat{\mu}_n) = \mu$ かつ $\text{Var}(\hat{\mu}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\mu}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$ となって不偏かつ一致推定量であることがわかる。)

○ 例 2

単回帰モデル $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ ($i=1, \dots, n$) を考える。なお、攪乱項 ε_i については古典的仮定が成立しているものとする。説明の簡単化のため、 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ であるものとしよう。

いま、 β の推定量としてノンパラメトリック推定量、 $\tilde{\beta}^* = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$ を考える。 $\tilde{\beta}^*$ の期待

値は、 $E(\tilde{\beta}^*) = \frac{E(y_n - y_1)}{x_n - x_1} = \beta + \frac{E(\varepsilon_n - \varepsilon_1)}{x_n - x_1} = \beta$ となり、不偏性を満たしていることがわか

る。しかし、 $\tilde{\beta}^*$ の分散を求めると、

$$\text{Var}(\tilde{\beta}^*) = \frac{E(\varepsilon_n - \varepsilon_1)^2}{(x_n - x_1)^2} = \frac{2\sigma^2}{(x_n - x_1)^2} \quad (\text{但し、}\sigma^2 \equiv E(\varepsilon_i^2) \text{ である。})$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\tilde{\beta}^*) \neq 0$ となって一致性は満たしていないことがわかる。 ■