

2001 年度エコノメトリックス

第 19 回授業 (6 月 20 日 (水)) 補足資料

一般化最小 2 乗推定量 (GLSE) が最良線形不偏推定量 (BLUE) であることの証明

回帰モデル $\underset{n \times 1}{y} = \underset{n \times k}{X} \underset{k \times 1}{\beta} + \underset{n \times 1}{\varepsilon}$ において、 $E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma^2 \underset{n \times n}{\Omega}$; Ω は正則な対称行列である

とする。このとき、任意の線形推定量

$$\tilde{\beta} = Z y = [(X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} + D'] y$$

を考える。ここで、 $\underset{n \times k}{D}$ は定数からなる行列とする。 $\tilde{\beta}$ が不偏推定量であるとき、

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}) &= E(Z y) = [(X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} + D'] X \beta + [(X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} + D'] E(\varepsilon) \\ &= \beta + D' X \beta \end{aligned}$$

であるから、 $D' X = O$ でなくてはならない。(ここで、 O は全ての要素が 0 からなる行列を表している。)

ところで、 $\tilde{\beta}$ の分散 (共分散) は、

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{\beta}) &= E(Z \varepsilon \varepsilon' Z') \\ &= \sigma^2 \{ (X' \Omega^{-1} X)^{-1} + (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' D + D' X (X' \Omega^{-1} X)^{-1} + D' \Omega D \} \end{aligned}$$

となるが、 $D' X = O$ という性質を使うと、

$$\text{Var}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 \{ (X' \Omega^{-1} X)^{-1} + D' \Omega D \} \geq \sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} = \text{Var}(\hat{\beta}_{GLS})$$

となって、 $D = O$ でないかぎり、線形不偏推定量の分散は GLSE の分散よりも大きい。
ゆえに、GLSE は最良線形不偏推定量である。 ■

一般化最小 2 乗推定量 (GLSE) の分散が、最小 2 乗推定量 (OLS) の分散以下であることの証明

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2 (X' X)^{-1} X' \Omega X (X' X)^{-1} \geq \sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} = \text{Var}(\hat{\beta}_{GLS})$$

を証明するには、

$$(X' X)^{-1} X' \Omega X (X' X)^{-1} - (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \geq O$$

であることを示せばよい。いま、 $\underset{n \times k}{G} = \Omega^{-1} X (X' \Omega^{-1} X)^{-1} - X (X' X)^{-1}$ とおくと、

$$(X' X)^{-1} X' \Omega X (X' X)^{-1} - (X' \Omega^{-1} X)^{-1} = G' \Omega G$$

と書き表すことができる。右辺の 2 次形式に関しては、

定理: A を $n \times n$ の対称行列、 B を $n \times k$, ($k \leq n$) の行列とする。
このとき、 $A \geq O$ であれば、 $B' A B \geq O$ 。

という行列に関する定理を使って、 $G' \Omega G \geq O$ が成立することがいえる。 ■