2001年度　エコノメトリックス
第２０回授業（６月２５日（月））補足資料（１）

＜授業の説明を下記に差し替え＞

◯Breusch=Pagan=Godfrey **検定**

攪乱項ε_iの分散が、外生変数$\underset{m\times 1}{\mathbf{z_i}} = (z_{1,i} \quad z_{2,i} \quad \cdots \quad z_{m,i})'$の一次結合

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \alpha_0 + \mathbf{z_i}'\boldsymbol{\alpha} \qquad \text{ただし、} \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m)'$$

として表現できるときの検定。
均一分散であれば、$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$であるので、仮説を

$$\begin{cases} H_0: \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \\ H_1: \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

とおいて検定する。攪乱項ε_iの分散のモデルを扱いやすいように次のように変形しよう。

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2(1 + \mathbf{z_i}'\boldsymbol{\delta})$$

ただし、$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_m)'$　かつ　$\sigma^2 = \alpha_0,\ \delta_i = \alpha_i / \alpha_0$である。$\boldsymbol{\delta}$は未知であるから、次の回帰モデルで推定する。

$$q_i \equiv \frac{e_i^2}{\sigma^2} - 1 = \delta_0 + \mathbf{z_i}'\boldsymbol{\delta} = (1 \quad \mathbf{z_i}')\begin{pmatrix} \delta_0 \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} = \mathbf{z_i^*}'\boldsymbol{\delta}^*$$

均一分散であれば、$\boldsymbol{\delta}^* = \mathbf{0}$であるので、仮説を

$$\begin{cases} H_0: \boldsymbol{\delta}^* = \mathbf{0} \\ H_1: \boldsymbol{\delta}^* \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

とおいて検定する。上記の回帰モデルで、$\boldsymbol{\delta}^*$の最小2乗推定量$\tilde{\boldsymbol{\delta}}^*$の分散は、

$$\mathrm{Var}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}^*) = 2\left(\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^*\right)^{-1} \qquad \underset{n\times(m+1)}{\mathbf{Z}^*} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{z_1} & \cdots & \mathbf{z_n} \end{pmatrix}'$$

となるから[1]、$\mathbf{q} = (q_1 \quad \cdots \quad q_n)'$とおくと

$$\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*\prime}\left(\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^*\right)\tilde{\boldsymbol{\delta}}^* = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\mathbf{Z}^*\left(\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^*\right)^{-1}\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{q}$$

は帰無仮説の下で、自由度mのχ^2分布にしたがうので、これを用いて検定を行なう。
実際には、σ^2は未知であるので、一致推定量$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$で置きかえる。

---

[1] e_iが正規分布に従うとき、$\mathrm{E}(q_i) = 0$かつ$\mathrm{Var}(q_i) = 2$であることを使っている。