エコノメトリックス　：理解のための練習問題－1

2002年10月1日

1　正規方程式とOLS推定量の導出

線形回帰モデル

$$y_i = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \epsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

を考えることにしよう。（ただし、$\boldsymbol{x}_i$ は $k \times 1$ ベクトルを表し、また ϵ_i は古典的仮定を満たしているものと仮定する。）
このとき、次の問いに答えなさい。(注：$\sum$ 記号を使った和の計算に慣れていない受講者は、$n = 3$ として答えなさい。）

1. 以下のように定義されたベクトル、行列を用いて (1) 式を表現しなさい。

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \boldsymbol{x}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

2. $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\, \beta_2)'$, $\boldsymbol{x}_i = (1,\, w_i)'$ であるとき、(1) 式をベクトル、行列を使わずに表現しなさい。
3. 2 の結果を用いて、

$$S = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon}$$

　を β_1, β_2 でそれぞれ偏微分しなさい。

4. 3 の結果を用いて、

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_2} \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = -2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}$$

　となることを示しなさい。

5. このモデルの OLS 推定量の行列表現

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

　を計算し、

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(w_i - \bar{w})^2}, \qquad \hat{\beta}_1 = \bar{y} - \bar{w}\hat{\beta}_2$$

であることを確認しなさい。ただし、

$$\bar{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

である。