

エコノメトリックス : 補足及び理解のための練習問題 - 4

2002年10月25日

1 補足 : 10月15日授業の訂正

10月15日授業において、転置記号の打ち間違いがあったことが、受講者からの指摘で判明した。自明のこととは思いますが、混乱を避けるため、記述の修正を下に記すので、各自ノートを修正して欲しい。

(関連の箇所) $k \times k$ の対称行列 A のスペクトル分解 $A = \Gamma \Lambda \Gamma'$ を考えよう。ここで、 Γ は $\Gamma \Gamma' = \Gamma' \Gamma = I_k$ なる直交行列であり、 Λ は A の固有値を要素にもつ対角行列

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

である。いま、

$$U = \Gamma \Lambda^{-1/2}, \quad \text{where } \Lambda^{-1/2} = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_k})$$

おくと、

$$\begin{aligned} UU' &= \Gamma \Lambda^{-1/2} \Lambda^{-1/2} \Gamma' \\ &= \Gamma \Lambda^{-1} \Gamma' = A^{-1} \end{aligned}$$

となる。(何故そうなるかは練習問題とする。)

(以下が訂正箇所)

よって、

$$\begin{aligned} U'AU &= \Lambda^{-1/2} \Gamma' A \Gamma \Lambda^{-1/2} \\ &= \Lambda^{-1/2} \Gamma' \Gamma \Lambda \Gamma' \Gamma \Lambda^{-1/2} \\ &= I_k. \end{aligned}$$

2 練習問題

1. 上記の補足において、 $UU' = A^{-1}$ を確認しなさい。
2. 次の対称行列の固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい。

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7}/2 \\ \sqrt{7}/2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 2 の対称行列をスペクトル分解しなさい。なお、固有値を対角要素にもつ対角行列 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ は、 $\lambda_1 > \lambda_2$ として求めなさい。

4. 線形回帰モデル $y = X'\beta + \epsilon$ において、 $\epsilon \sim (0, \sigma^2\Omega)$ であるとき、

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \geq \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \text{Var}(\hat{\beta}_{GLS})$$

(等号成立は $\Omega = I_n$ のときのみ) であることを証明しなさい。