エコノメトリックスⅡ / 上級エコノメトリックス 03

宿題4 解答（Q1のみ）

2004年1月30日

Q1

1. Bernoulli分布は
$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{with } p \\ 0 & \text{with } 1-p \end{cases}$$

なる確率変数。よって確率関数は
$$P(y_i) = p^{y_i}(1-p)^{1-y_i}$$
したがって尤度関数は
$$L(p; y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ p^{y_i}(1-p)^{1-y_i} \right\}.$$

対数尤度関数は
$$\log L(p; y_1, \dots, y_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\log p + \left(\sum_{i=1}^{n}(1-y_i)\right) \times \log(-p)$$
$$= n \log p + (\log p - \log(1-p)) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$
//

2. $$\frac{\partial \log L}{\partial p} = -\frac{n}{1-p} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

より
$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$
//

3. $$\frac{\partial^2 \log L}{(\partial p)^2} = -\frac{n}{(1-p)^2} + \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2}\right)\sum_{i=1}^{n} y_i$$

よって
$$I(p) = -\mathbb{E}\frac{\partial^2 \log L}{(\partial p)^2} = \frac{np^2}{(1-p)^2 p^2} - \frac{(-1+2p)np}{p^2(1-p)^2}$$
$$= \frac{np(1-p)}{(1-p)^2 p^2} = \frac{n}{p(1-p)}$$
//

4. 対立仮説の下での p の最尤推定量を $\hat{p}$ とすると、
尤度比検定統計量は

$$2\log\frac{L(\hat{p})}{L(p_0)} = 2\{\log L(\hat{p}) - \log L(p_0)\}。$$

1.の結果を用いると

$$\log L(\hat{p}) = 100\times(-0.598) + (-0.799-(-0.598))\times 45$$
$$= -59.8 - 9.045 = -68.845$$
$$\log L(p_0) = 100\times(-0.357) + (-1.204-(-0.357))\times 45$$
$$= -35.7 - 38.115 = -73.815$$

よって

$$2\log\frac{L(\hat{p})}{L(p_0)} = 2\times(-68.845-(-73.815)) = 9.94.$$

帰無仮説 H_0 のもとで $2\log\frac{L(\hat{p})}{L(p_0)} \sim \chi(1)$。
自由度1のカイ2乗分布の上側5%点は 3.84
よって 有意水準5%で H_0 は棄却される。

5. $I(p) = \frac{n}{p(1-p)}$ より

Wald統計量は

$$W = n(\hat{p}-p_0)I(\hat{p})(\hat{p}-p_0) \sim \chi(1)$$

under H_0

$$\begin{cases} n=100 \\ \hat{p}=0.45 \\ p_0=0.3 \end{cases}$$ より

$$I(\hat{p}) = \frac{100}{0.2475}$$

よって

$$W = (0.45-0.3)\frac{100}{0.2475}(0.45-0.3)$$

$$= 9.091.$$ よって 有意水準5%は H_0 は棄却される。