エコノメトリックスII/上級エコノメトリックス03
宿題4 解答例（続）

竹内惠行

2004年2月2日

Q2

お詫び：設問3以降で、帰無仮説 H_0： $2p = q$ の下では、最尤推定量が一意に求まらないことが判明した。そこで、帰無仮説 H_0： $p = q$、対立仮説 H_1： $p \neq q$ と訂正し、その解答例を示すことにする

1. 対数尤度関数 $\log L(p, q; y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m})$ は

$$\begin{array}{rcl} \log L(p, q; y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}) & = & n\log(1-p) + (\log p - \log(1-p)) \sum_{i=1}^{n} y_i \\ & & +m\log(1-q) + (\log q - \log(1-q)) \sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \end{array}$$

となる。

2. まず $\log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y})$ の Yacobian, Hessian を求めることにしよう。
ここで、$\boldsymbol{y} = (y_1,\, \ldots,\, y_n,\, y_{n+1},\, \ldots,\, y_{n+m})'$、$\boldsymbol{\theta} = (p,\, q)'$ である。

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial p} & = & -\frac{n}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial q} & = & -\frac{m}{1-q} + \frac{1}{q(1-q)} \sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \\ \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{(\partial p)^2} & = & -\frac{n}{(1-p)^2} - \frac{1-2p}{p^2(1-p)^2} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{(\partial q)^2} & = & -\frac{n}{(1-q)^2} - \frac{1-2q}{q^2(1-q)^2} \sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \\ \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial p \partial q} & = & 0 \end{array}$$

となるから、

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial logL(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ -\frac{m}{1-q} + \frac{1}{q(1-q)} \sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \end{pmatrix}$$

また

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -\mathrm{E}\frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{pmatrix} \frac{n}{p(1-p)} & 0 \\ 0 & \frac{m}{q(1-q)} \end{pmatrix}$$

上の結果より、対立仮説 H_1： $p \neq q$ の下での最尤推定量は、

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{45}{100} = 0.45,\;\; \hat{q} = \frac{\sum_{i=n+1}^{n+m} y_i}{m} = \frac{30}{50} = 0.6$$

となり、また帰無仮説 H_0 : $p = q$ の下での最尤推定量は、

$$\hat{p}_0 = \hat{q}_0 = \frac{\sum_{n=1}^{n+m} y_i}{n+m} = \frac{45+30}{100+50} = 0.5$$

と求められる。よって尤度比検定統計量は

$$\begin{aligned}
2\log\frac{L(\hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_0)} &= 2\{\log L(\hat{\theta}) - \log L(\hat{\theta}_0)\} \\
&= 2\{(100\log 0.55 + (\log 0.45 - \log 0.55)\times 45 + 50\log 0.4 \\
&\quad +(\log 0.6 - \log 0.4)\times 30) - (100\log 0.5 + 50\log 0.5)\} \\
&= 2\{(-102.495) - (103.972)\} = 2.954
\end{aligned}$$

となる。帰無仮説の下でこの検定統計量は自由度1のカイ2乗 (χ^2) 分布に従う。自由度1のカイ2乗分布の上側5%点は3.84であるから、有意水準5%で帰無仮説 H_0 : $p = q$ は棄却できない。

3. $\boldsymbol{r} = (1\ -1)'$ とすると帰無仮説は $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\theta} = 0$ と書き換えられる。このとき、Wald検定統計量は

$$\begin{aligned}
W &= (\boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}\boldsymbol{r})^{-1}(\boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&= (\hat{p}\ \hat{q})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\left\{(1\ -1)\begin{pmatrix} \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{q}(1-\hat{q})}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}^{-1}(1\ -1)\begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \\
&= (0.45 - 0.6)\left(\frac{0.2475}{100} + \frac{0.24}{50}\right)^{-1}(0.45 - 0.6) \\
&= 0.15^2 \times \frac{100}{0.7275} = 3.093
\end{aligned}$$

となる。帰無仮説の下でこの検定統計量は自由度1のカイ2乗 (χ^2) 分布に従う。自由度1のカイ2乗分布の上側5%点は3.84であるから、有意水準5%で帰無仮説 H_0 : $p = q$ は棄却できない。

4. 帰無仮説の下で、Yacobian$\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ は

$$\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{1-\hat{p}_0} + \frac{1}{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ -\frac{m}{1-\hat{q}_0} + \frac{1}{\hat{q}_0(1-\hat{q}_0)}\sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

また情報行列 $\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$ は

$$\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} & 0 \\ 0 & \frac{m}{\hat{q}_0(1-\hat{q}_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{0.5^2} & 0 \\ 0 & \frac{50}{0.5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}$$

よって、ラグランジェ乗数検定統計量は

$$\begin{aligned}
LM &= \boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)'\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^{-1}\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\
&= (-20\ 40)\begin{pmatrix} \frac{1}{400} & 0 \\ 0 & \frac{1}{200} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} = 1 + 8 = 9
\end{aligned}$$

となる。帰無仮説の下でこの検定統計量は自由度1のカイ2乗 (χ^2) 分布に従う。自由度1のカイ2乗分布の上側5%点は3.84であるから、有意水準5%で帰無仮説 H_0 : $p = q$ は棄却される。

補足と注意

授業で説明した Wald 検定統計量、ラグランジェ乗数検定統計量の式であるが、情報行列 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$ の扱いについて紛らわしい表記をしたようである。ここにお詫びすると共に、次のように補足する。実は、宿題の設問での情報行列 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = O(n)$ である。したがって $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の漸近正規性は $\frac{1}{n}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) \to \boldsymbol{I}^*(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0} < +\infty$ とおくと、

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \to \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}^*(\boldsymbol{\theta})^{-1})$$

となる。よって、Wald 検定統計量は

$$\begin{aligned} W &= (\boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}\boldsymbol{r})^{-1}(\boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= n(\boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{I}^*(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}\boldsymbol{r})^{-1}(\boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned}$$

と、またラグランジェ乗数検定統計量は

$$\begin{aligned} LM &= \boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)'\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^{-1}\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ &= \frac{1}{n}\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)'\boldsymbol{I}^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)^{-1}\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{aligned}$$

とそれぞれ表現できる