エコノメトリックスII/上級エコノメトリックス 03
第9回授業(11/26/03)の補足

2003年12月12日

1 補足(MLEの一致性)

第9回授業において、最尤推定量(MLE)の一致性(consistency)について説明したが、本稿では、例を挙げて説明する。

いま、y_i $(i = 1, \ldots, n)$ が独立なBernoulli分布にしたがっているケースを考えよう。Bernoulli分布の確率関数は、母数(パラメータ)を p で表すと、

$$\mathrm{P}(y_i) = p^{y_i}(1-p)^{1-y_i}$$

であらわされるから、1個の標本 y_i の尤度は

$$L(p; y_i) = \mathrm{P}(y_i) = p^{y_i}(1-p)^{1-y_i}.$$

したがって、尤度比 $L(p; y_i)/L(p_0; y_i)$ を真の母数 p_0 の確率関数で評価した期待値をとると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_0\left[\frac{L(p; y_i)}{L(p_0; y_i)}\right] &= \left[\frac{p^{y_i}(1-p)^{1-y_i}}{p_0^{y_i}(1-p_0)^{1-y_i}}\right] \\
&= \frac{p}{p_0}p_0 + \frac{1-p}{1-p_0}(1-p_0) = 1
\end{aligned}$$

となる。これと、自然対数(log)が凹関数(concave function)であることよりJensenの不等式を用いると、

$$D_i \equiv \mathrm{E}_0\left[\log\frac{L(p; y_i)}{L(p_0; y_i)}\right] \le \log \mathrm{E}_0\left[\frac{L(p; y_i)}{L(p_0; y_i)}\right] = 0$$

が成立する。ところで、左辺を整理すると、

$$\begin{aligned}
D_i &= \mathrm{E}_0 \log L(p; y_i) - \mathrm{E}_0 \log L(p_0; y_i) \\
&= \{p_0 \log p + (1-p_0)\log(1-p)\} - \{p_0 \log p_0 + (1-p_0)\log(1-p_0)\} \\
&= p_0 \log\frac{p}{p_0} + (1-p_0)\log\frac{1-p}{1-p_0}
\end{aligned}$$

なる。また、y_i は i.i.d. より、

$$\log L(p;y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^{n}\log L(p;y_i)$$

であるから、

$$D\equiv\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i=p_0\log\frac{p}{p_0}+(1-p_0)\log\frac{1-p}{1-p_0}\leq 0$$

が成立する。次に、$p\neq p_0$ のとき、$D<0$ であることを示そう。となる。D を p で微分すると

$$\frac{dD}{dp}=\frac{p_0-p}{p(1-p)}$$

となるから、

$$\begin{cases} dD/dp>0 & \text{if} \quad p_0>p \\ dD/dp=0 & \text{if} \quad p_0=p \\ dD/dp<0 & \text{if} \quad p_0<p \end{cases}$$

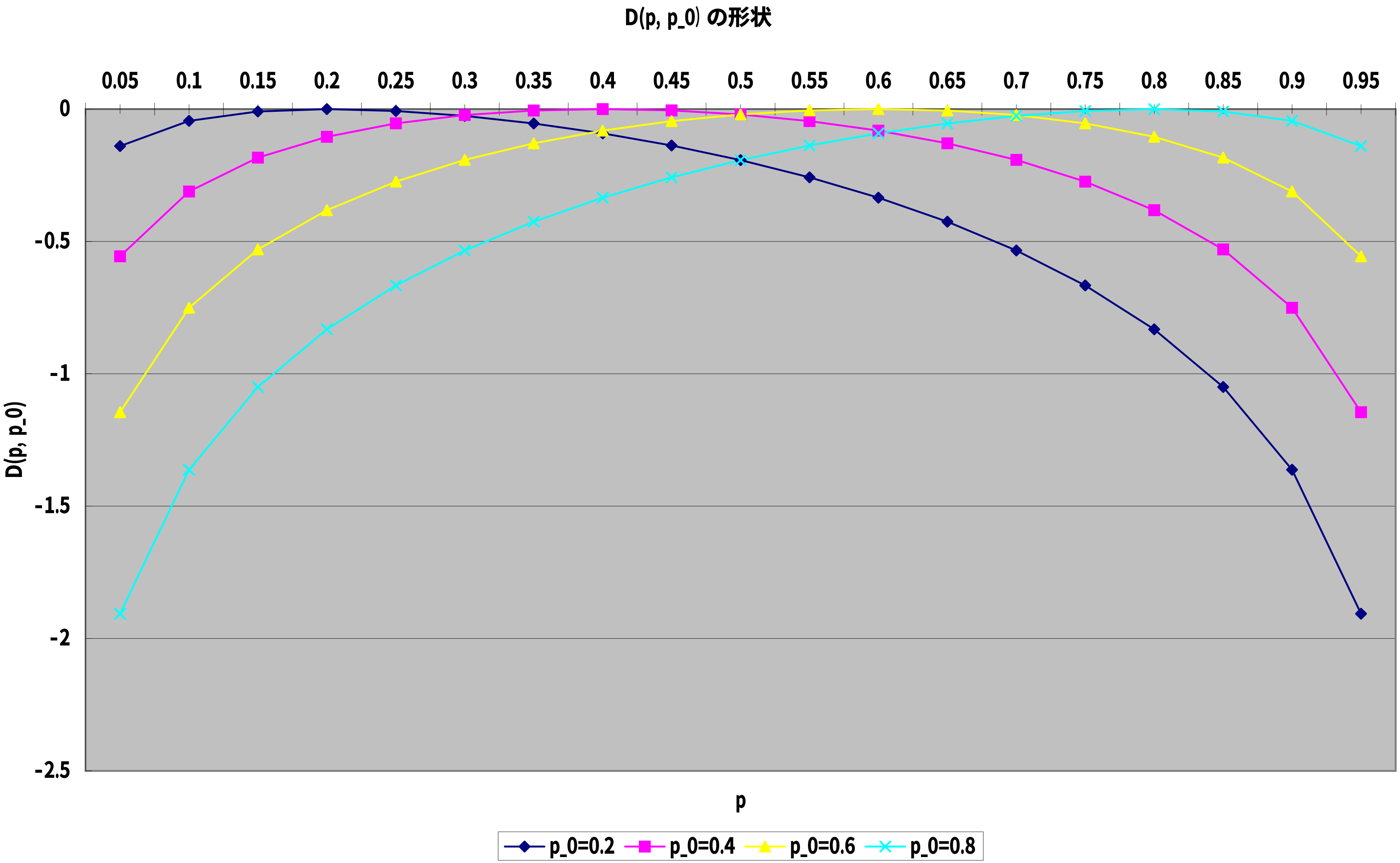
がいえる。また、2 回微分を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2D}{(dp)^2} &= -\frac{1}{p(1-p)}-\frac{(p_0-p)(1-2p)}{[p(1-p)]^2} \\ &= \frac{-(p_0-p)^2+p_0^2-p_0}{[p(1-p)]^2} \\ &< 0\end{aligned}$$

したがって、D は $p=p_0$ で最大値をとる凹関数であることがわかる。よって、

$$D=\frac{1}{n}\mathrm{E}_0\log L(p;y_1,\ldots,y_n)-\frac{1}{n}\mathrm{E}_0\log L(p_0;y_1,\ldots,y_n)<0 \quad \text{for} \quad p\neq p_0$$

次ページの図は、様々な p_0 $(0<p_0<1)$ について $D(p,p_0)$ の関数形をあらわしたものである。


D(p, p_0) の形状
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
D(p, p_0)
p
p_0=0.2
p_0=0.4
p_0=0.6
p_0=0.8