

統計 第 2 回宿題 解答例

(by TA 各務和彦)

問 1

$$\begin{aligned}
 (1) P(Z \geq 1.57) &= 1 - P(Z < 1.57) = 1 - 0.9418 = 0.0582 \\
 (2) P(Z < 1.34) &= 0.9099 \\
 (3) P(-0.37 < Z \leq 1.6) &= P(Z > 1.6) - P(Z \leq -0.37) \\
 &= P(Z > 1.6) - \{1 - P(Z > 0.37)\} \\
 &= 0.9452 - (1 - 0.6443) \\
 &= 0.5895 \\
 (4) P(-2.8 < Z < -0.21) &= P(Z < -2.8) - P(Z \leq -0.21) \\
 &= \{1 - P(Z > 0.21)\} - \{1 - P(Z \geq 2.8)\} \\
 &= (1 - 0.5832) - (1 - 0.9974) \\
 &= 0.4142
 \end{aligned}$$

問 2

$$\begin{aligned}
 (1) P(X \geq 5.6) &= P\left(\frac{X-2}{3} \geq \frac{5.6-2}{3}\right) \\
 &= P(Z \geq 2.1) \\
 &= 1 - P(Z < 1.2) \\
 &= 1 - 0.8849 \\
 &= 0.1151 \\
 (2) P(X < 10) &= P\left(\frac{X-2}{3} < \frac{10-2}{3}\right) \\
 &= P(Z < 2.67) \\
 &= 0.9962 \\
 (3) P(3.2 < X < 7.7) &= P\left(\frac{3.2-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{7.7-2}{3}\right) \\
 &= P(0.4 < Z < 1.9) \\
 &= P(Z < 1.9) - P(Z \leq 0.4) \\
 &= 0.9713 - 0.6554 \\
 &= 0.3159
 \end{aligned}$$

注意：問題では $P(3.2 < Z < 7.7)$ とタイプミスしていました。しかし、これでは分布表に値がないので分布表から答えを出すことはできません。

$$\begin{aligned}
(4) P(|X| < 4) &= P\left(\frac{-4-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{4-2}{3}\right) \\
&= P(-2 < Z < 0.67) \\
&= P(Z < 0.67) - P(Z \leq -2) \\
&= P(Z < 0.67) - (1 - P(Z < 2)) \\
&= 0.7486 - (1 - 0.9772) \\
&= 0.7258
\end{aligned}$$

注意: 問題では $P(|X| < 4)$ とタイプミスしていました。これでは絶対値をはずすことができません。

問3

$$(1) P(4 < W \leq 6.2) = 0.2 \times (6.2 - 4) = 0.2 \times 2.2 = 0.44$$

$$\begin{aligned}
(2) E(2W^2 - 4W + 2) &= \int_3^8 (2W^2 - 4W + 2) \frac{1}{5} dW \\
&= \left[\frac{2}{15} W^3 - \frac{2}{5} W^2 + \frac{2}{5} W \right]_3^8 \\
&= \frac{688}{15} - \frac{18}{15} \\
&= \frac{134}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) E(W^3) &= \int_3^8 (W^3) \frac{1}{5} dW \\
&= \left[\frac{1}{20} W^4 \right]_3^8 \\
&= \frac{4096}{20} - \frac{81}{20} \\
&= \frac{803}{4}
\end{aligned}$$

問4 ((2)を訂正: 7/14/03)

$$(1) P(Y = 2) = {}_3C_2 0.3^2 (1-0.3)^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0.3^2 (1-0.3)^{3-2} = 0.189$$

$$\begin{aligned}
(2) E(3Y^2 + Y) &= \sum_{Y=0}^3 (3Y^2 + Y) {}_3C_Y 0.3^Y (1-0.3)^{3-Y} \\
&= 0 + (3+1) \times 3 \times 0.3 \times 0.7^2 + (3 \times 2^2 + 2) \times 3 \times 0.3^2 \times 0.7 \\
&\quad + (3 \times 3^2 + 3) \times 1 \times 0.3^3 \\
&= 5.22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) P(X = i, Y = j) &= P(X = i) \times P(Y = j) \\
&= {}_2C_X \times 0.3^X \times (1-0.3)^{2-X} \times {}_3C_Y \times 0.3^Y \times (1-0.3)^{3-Y} \\
&= {}_2C_X \times {}_3C_Y \times 0.3^{X+Y} \times (1-0.3)^{5-X-Y}
\end{aligned}$$

(4) $X + Y$ のとりうる値は 0, 1, 2, 3, 4, 5 で $0 \leq W \leq 5$ とするとき、

$$\begin{aligned} P(W) &= \sum_{k=0}^W {}_2C_k \times 0.3^k \times (1-0.3)^{2-k} \times {}_3C_{W-k} \times 0.3^{W-k} \times (1-0.3)^{3-W+k} \\ &= \sum_{k=0}^W {}_2C_k \times {}_3C_{W-k} \times 0.3^W \times (1-0.3)^{5-W} \\ &= \sum_{k=0}^W {}_5C_W \times 0.3^W \times (1-0.3)^{5-W} \end{aligned}$$

$$(5) E(X) = 5 \times 0.3 = 1.5$$

$$\text{Var}(X) = 5 \times 0.3 \times (1-0.3) = 1.05$$

$$(6) W \sim \text{Bin}(5, 0.3)$$

【解説】二項分布の再生性を確認する問題です。(2)は確率変数の関数の期待値を求める問題で、期待値の定義を理解していれば難しくはないはずです。(3)は独立な 2 つの確率変数の同時確率(同時分布)を求める問題です。「独立」という概念を理解しているかどうかを問うています。(4)については、 W の値に対応する X と Y の全ての組み合わせを考え、それぞれの確率から W のとりうる値についての確率を求める、という別解もあります。

問 5 ((4), (5)を修正 : 7/14/03)

$$(1) P(X = 4) = \frac{1}{5}$$

$$(2) P(Y = 2 | X = 4) = \frac{P(Y = 2 \cap X = 4)}{P(X = 4)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (3) P(Y = 2) &= P(Y = 2 | X = 1)P(X = 1) + P(Y = 2 | X = 2)P(X = 2) \\ &\quad + P(Y = 2 | X = 3)P(X = 3) + P(Y = 2 | X = 4)P(X = 4) \\ &\quad + P(Y = 2 | X = 5)P(X = 5) \\ &= 0 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{77}{300} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) P(X = 4 | Y = 2) &= \frac{P(Y = 2 | X = 4)P(X = 4)}{\sum_{i=1}^5 P(Y = 2 | X = i)P(X = i)} \\ &= \frac{P(Y = 2 | X = 4)P(X = 4)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}}{\frac{77}{300}} \\ &= \frac{15}{77} \end{aligned}$$

$$(5)(4)と同様にして \quad P(X = 1 | Y = 2) = 0$$

$$P(X = 2 | Y = 2) = \frac{30}{77}$$

$$P(X = 3 | Y = 2) = \frac{20}{77}$$

$$P(X = 5 | Y = 2) = \frac{12}{77}$$

したがって

$$E(X | Y = 2) = 1 \times 0 + 2 \times \frac{30}{77} + 3 \times \frac{20}{77} + 4 \times \frac{15}{77} + 5 \times \frac{12}{77} = \frac{240}{77}$$

【解説】ベイズの定理についての基本的な問題です。 X を条件とした時の Y の条件付確率と Y の(無条件)確率から、 X と Y の同時確率を求められることを理解しているかどうか、がこの問題の一つのキーポイントです。もう一つのポイントは「排反」(disjoint)という概念を理解しているかどうかです。

全体の講評 (by 竹内&各務)

問1、問2は計算のプロセスを含め、大体の人が正答でした。標準正規分布表の使い方は大方習熟されたのではないかと思います。しかし、問3以降は、途中経過なしに答のみを記した受講者が2割程度いました。この宿題は理解を深めるためのものですから、できるだけ解答に至るプロセスが分かるような記述を心掛けてください。

問3の一様分布の期待値の計算は、6～7割の正答率でした。期待値の定義をきちんと理解していれば、積分計算だけで、それほど難しい問題ではない筈です。また問4の「二項分布の再生性」に関する問題や、問5の「ベイズの定理」についての問題は正答率が5割程度でした。よくわからなかった受講者は、この解答例や教科書で、十分に復習してください。