第8回 5月14日の授業内容

- §3. 確率
  - §3.1 基礎的概念
    - 標本空間
  - §3.2 事象の独立性と従属性
    - 条件付確率

5/14/03 1

§3.1 基礎的概念(1)

- 確率の定義
  - 結果の生起が不確実な事象（ことがら）について、生起の可能性を[0,1]の実数で表したもの。
  - 確実に起きるときは1、確実に起きないときは0として表す。

5/14/03 2

§3.1 基礎的概念(2)

試行の結果が有限のケース

- 基本事象 elementary events
  - 試行の結果 ω_k (k=1,…,N)
- 標本空間 sample space
  - 全ての基本事象からなる集合 $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_N\}$
- 事象 event
  - 標本空間の部分集合
- 空事象 null event Φ

5/14/03 3

§3.1 基礎的概念(3)

◈**確率の公理･定理**
- (1) 0≦P(E)≦1
- (2) P(Ω)= 1
- (3) P(Φ)=0
- (4) if A∩B= Φ then P(A∪B)=P(A)＋P(B)
  - 排反disjoint: 事象A, Bの積事象が空事象である、すなわち、A∩B= Φであるとき、A, Bは排反であるという。
- (5) if A⊆B then P(A)≦P(B)

5/14/03 4

§3.1 基礎的概念(4)

◈**加法定理 (和の定理)**
- P(A∪B)=P(A)＋P(B)－P(A∩B)

◈**補事象 (余事象)** compliment
- A∩B= Φであり、A∪B=Ωであるような事象BをAの補事象といい、A^c (又は $\bar{A}$) で表す。
- P(A)＋P(A^c)=P(Ω)=1 より P(A^c)=1－P(A)

5/14/03 5

§3.1 基礎的概念(5)

【補足】試行の結果が無限のケース

◈標本空間に含まれる基本事象の数が無限のとき、任意の事象が生起する確率を基本事象の数を用いて求めることはできない。

◈この場合、基本事象の起きる確率は0となる。

⇩

◈厳密には、「測度論」による確率の定義が必要になるが、この場合の確率の直観的理解のためには、参考書 (森棟(2000)) p.54～55の説明をみよ。

5/14/03 6

§3.2 事象の独立性と従属性

◈**条件付確率** conditional probability

- **事象**A, B**という2つの事象があるとき、いま事象**B**が起きたという条件の下で、事象**A**が生起する確率を考える。この確率を、事象**B**を条件としたときの事象**A**の条件付確率といい、**

  P(A|B) **または** $P_B(A)$

  で表す。

5/14/03 7

§3.2 事象の独立性と従属性(2)

◈**条件付確率の求め方**

- 事象Bが起きたときに事象Aが起きる (すなわちA∩B) 確率は、P(A∩B)。
- 事象Bが起きる確率はP(B)。
- いま事象Bは起きているのだから、求める確率は P(A|B)=P(A∩B)/ P(B) となる。

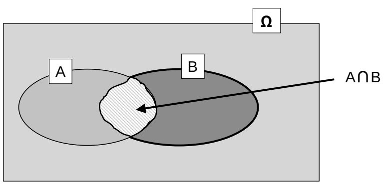
◈**積の定理**

- P(A∩B) =P(A|B)P(B)

5/14/03 8

§3.2 事象の独立性と従属性(3)

◈ベン図に示したように、条件付確率は標本空間を条件に限定していることがわかる。



5/14/03 9

§3.2 事象の独立性と従属性(4)

◈**独立性** independency

- 事象Bを条件としたときの事象Aの条件付確率 $P(A|B)$ が条件に依存しない、すなわち、$P(A|B)=P(A)$であるとき、事象AとBは独立であるという。
- AとBが独立であるとき、$P(A \cap B)=P(A)P(B)$。

◈**従属性** dependency

- 事象AとBが独立でないとき、AとBは従属しているという。

5/14/03 10

§3.2 事象の独立性と従属性(5)

◈**独立性**（続）

- 事象Aの条件付確率 $P(A|B)$ が条件に依存しないとは、どういうことか。
  - 任意の事象Bについて、
    $P(A|B)=P(A|B^C)=P(A)$
    が成立すること。
- 「独立」と「排反」を混同しないように!!

5/14/03 11

§3.2 事象の独立性と従属性(6)

◈**条件付確率に関する公理** （$P(B)>0$を仮定）

- (1) $P(A|B) \geqq 0$
- (2) $P(A|B)=1 \quad A \supset B$
- (3) もし $\{A_i \cap B\}$ と $\{A_j \cap B\}$ が排反であるならば、（すなわち $\{A_i \cap B\} \cup \{A_j \cap B\} = \Phi$ for $(I \neq j)$）
  $P(A_i \cup A_j \cup \ldots |B) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$
- (4) もし、$B \supset H$、$B \supset G$かつ$P(G) \neq 0$であるなら

$$\frac{P(H|B)}{P(G|B)} = \frac{P(H)}{P(G)}$$

5/14/03 12