第9回 5月20日の授業内容

- §3. 確率（続）
  - §3.2 事象の独立性と従属性（続）
    - 条件付確率（続）
  - §3.3 ベイズの定理
- §4. 確率変数と確率分布
  - §4.1 確率変数とは
  - §4.2 離散型確率変数

5/20/03 1

<u>前回スライドの訂正</u>

§3.2 事象の独立性と従属性(7)

- 条件付確率に関する公理 （P(B)>0を仮定）
  - (1) $P(A|B) \geqq 0$
  - (2) $P(A|B)=1$ $A \supset B$
  - (3) もし $\{A_i \cap B\}$ と $\{A_j \cap B\}$ が排反であるならば、（すなわち $\{A_i \cap B\} \cup \{A_j \cap B\} = \Phi$ for $(i \neq j)$）
$\underline{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots}$
  - (4) もし、$B \supset H$、$B \supset G$かつ$P(G) \neq 0$であるなら
    $$\frac{P(H|B)}{P(G|B)} = \frac{P(H)}{P(G)}$$

5/20/03 2

§3.3 ベイズの定理

- ベイズの定理 Bayes' theorem
  - 条件付確率$P(A|B_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ と、条件となる事象の生起する確率$P(B_i)$から、条件を逆にした条件付確率$P(B_i|A)$が求まるという定理。
  - （簡単なケース）
$P(B)>0$である事象Bがあるとする。いま任意の事象Aについて$P(A)>0$であるとき、条件付確率$P(B|A)$は
    $$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$
    で求められる。

5/20/03 3

§3.3 ベイズの定理(2)

- ベイズの定理 (一般的なケース)
  - 事象$B_1, B_2, \dots, B_n$が互いに排反であり、i=1,…,nについて$P(B_i)>0$かつ、
    $P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)=1$であるものとする。
    このとき、$P(A)>0$である任意の事象Aについて

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

が成立する。

5/20/03 4

§3.3 ベイズの定理(3)

- 例:カルテル破り
  - 甲、乙2社がカルテルを結んでいる状態を考える。いま、「甲社がカルテルを破る」という事象をA、「乙社がカルテルを破る」という事象をBとする。
  - いま、自分が甲社であるとし、相手の出方によって、自分がカルテルを破る確率が決まっているものとしよう。このとき、ベイズの定理によって、相手がカルテルを破る確率が判れば、自分の戦略を所与とした時に相手がカルテルを破る確率が求められる。

5/20/03 5

§3.3 ベイズの定理(4)

- 数値例
  - 相手 (乙) がカルテルを破るときに自分 (甲) がカルテルを破る確率:$P(A|B)=1$
  - 相手 (乙) がカルテルを守るときに自分 (甲) がカルテルを破る確率:$P(A|B^c)=1/2$
  - 相手 (乙) がカルテルを破る確率:$P(B)=1/3$
  - 相手 (乙) がカルテルを守る確率:$P(B^c)=1-P(B)=2/3$
  - 自分 (甲) がカルテルを破るときに、相手 (乙) がカルテルを破る確率:$P(B|A)$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)} = \frac{1 \times 1/3}{1 \times 1/3 + 1/2 \times 2/3} = \frac{1}{2}$$

5/20/03 6

§4.1 確率変数とは

- 確率変数とは
  - 確率的にさまざまな値をとる変数
- 何故確率的なのか?
  - 「母集団－標本」関係の枠組で考えると理解しやすい。
  - 母集団から無作為抽出（ランダムサンプリング）されたのが、標本。→ランダムサンプリングが確率の素。
- 確率分布
  - 確率変数の分布のこと。
  - 母集団分布と相似形。

5/20/03 7

