

第14回 6月10日の授業内容

- ◆ § 4. 確率変数と確率分布
 - § 4.5 基本的な確率分布 (続)
 - ◆ § 4.5.3 正規分布
 - 定義
 - 標準正規分布
 - 標準正規分布表
 - 正規分布の性質
 - 再生性
 - 関連する確率分布 (カイ2乗分布、t分布)

6/10/03

1

§ 4.5.3 正規分布(1)

- ◆ 正規分布とは
 - 多くの自然現象のデータに見られる分布を数学的に表現したもの
 - 連続型確率変数の一つ
 - とる値の範囲は、 $[-\infty, \infty]$

6/10/03

2

§ 4.5.3 正規分布(2)

- ◆ 確率密度関数
 - 平均 μ 、分散 σ^2 の2つのパラメータの関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mu \equiv E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\sigma^2 \equiv Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

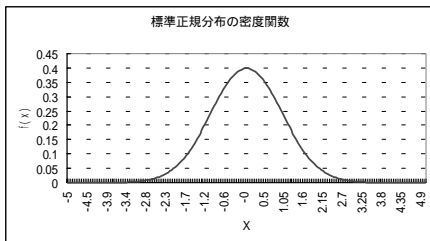
6/10/03

3

§ 4.5.3 正規分布(3)

◆ 密度関数の形状

平均 μ を中心とした左右対称の分布。ベル型。



6/10/03

4

§ 4.5.3 正規分布(4)

◆ 分布関数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$F(-\infty) = 0, F(\mu) = 1/2, F(\infty) = 1$$

◆ 確率変数 X の確率分布が正規分布であるとき、すなわち X が正規分布にしたがうとき、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表す。

6/10/03

5

§ 4.5.3 正規分布(5)

◆ 分布関数 $F(x)$ の性質

■ 平均 μ から、標準偏差 σ の a 倍離れているかによって確率が決まる。

- $P(\mu < X < \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma) - F(\mu) = 0.341$
- $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.136$
- $P(\mu + 2\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.022$
- $P(\mu + 3\sigma < X < \mu + 4\sigma) = 0.001$

■ 積分は難しいので、平均0、分散1の正規分布(標準正規分布)の分布関数 $\Phi(x)$ が作表されている。

6/10/03

6

§ 4.5.3 正規分布(6)

◆標準正規分布表

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \text{ または}$$

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \text{ を作表したもの。}$$

6/10/03

7

§ 4.5.3 正規分布(7)

◆正規分布の性質

- 正規分布にしたがう確率変数 X を線形変換した Y もまた正規分布にしたがう。
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であるとき、
 - $X+b \sim N(\mu+b, \sigma^2)$
 - $aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$
 - $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$
- またこのとき、 $Y=(X - \mu)/\sigma$ とすると、 $Y \sim N(0,1)$ 。標準化

6/10/03

8

§ 4.5.3 正規分布(8)

◆再生性

- 互いに独立な確率変数 X, Z があり、それぞれ $X \sim N(\mu, \sigma^2), Z \sim N(\mu', \sigma'^2)$ であるとき、 $W=X+Z$ もまた正規分布にしたがい、 $W \sim N(\mu + \mu', \sigma^2 + \sigma'^2)$ となる。
この性質を正規分布の再生性という。
再生性は正規分布の他、二項分布などにもある。

◆関連する確率分布(カイ2乗分布、t分布)

6/10/03

9
