第15回　6月11日の授業内容

- ◈§5.　標本分布
  - §5.1　無作為抽出と無作為標本
  - §5.2　統計量の分布
  - §5.3　統計量の分布の近似
    - §5.3.1　大数の法則

6/11/03　1

§5.1　無作為抽出と無作為標本

- ◈母集団 population
  - 有限母集団：個体が有限個
  - 無限母集団：個体が無限個
- ◈無作為抽出 random sampling
  - 復元抽出：sampling with replacement
  - 非復元抽出:sampling without replacement
- ◈無作為抽出の方法
  - 乱数（一様乱数）
  - 乱数表

6/11/03　2

§5.1　無作為抽出と無作為標本(2)

- ◈無作為標本
  - 無作為抽出された標本
  - 標本の各個体は互いに独立で同じ確率分布にしたがう確率変数
- ◈統計量 statistics
  - 確率変数の関数
    →統計量も確率変数であることに注意!!
  - 標本の各個体の関数であることが多い。
    （例）標本の算術平均（標本平均）

6/11/03　3

§5.2　統計量の分布

- 統計量の分布を知ることの必要性
  - 標本のデータを推測手段とする
    ⇒ 統計量で推測
  - 推測の精度を評価可能。→推測統計の基本
- 統計量g(X_1, X_2, …, X_n)の分布
  - 平均　$\zeta \equiv \mathrm{E}(g(X_1, X_2, \ldots, X_n))$

$$= \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1) \times f(x_2) \times \cdots \times f(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

  - 分散

$$\mathrm{Var}(g(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \mathrm{E}\{(g(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \zeta)^2\}$$

$$= \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \xi\}^2 f(x_1) \times f(x_2) \times \cdots \times f(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

6/11/03　4

§5.2　統計量の分布(2)

- 標本平均 (標本データの算術平均) の分布

$$\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ただし　$\mathrm{E}(X_i) = \mu,\ \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

  - 1次モーメント (平均)

$$\mathrm{E}\left(\overline{X}_n\right) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

  - 平均回りの2次モーメント (分散)

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \mathrm{E}\left(\overline{X}_n - \mathrm{E}\overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i - \mu)^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

6/11/03　5

§5.2　統計量の分布(3)

- (例) 二項分布の (平均) 成功比率の分布
  - 確率pで当たりの出るくじをn回引いたときの「当たり」の回数をXとするとX~Bin(n,p)。
  - このとき、「当たり」の比率 X/n の分布を考えよう。二項分布の性質より、
    $\mathrm{E}(X/n) = (1/n)\mathrm{E}(X) = np/n = p$
    $\mathrm{Var}(X/n) = (1/n^2)\mathrm{Var}(X) = np(1-p)/n^2 = p(1-p)/n$
    となることがわかる。

6/11/03　6

§5.2 統計量の分布(4)

◈有限母集団の場合の統計量の分布
- $B_1, B_2, \ldots, B_N$: 母集団の個体
- 標本数nの非復元抽出を行う場合
- 標本平均の分布のモーメント

$$\mathrm{E}(\overline{X}_n) = \frac{{}_{N-1}C_{n-1}}{{}_N C_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} B_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} B_j$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(B_j - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} B_k\right)^2\right)$$

6/11/03 7

§5.3 統計量の分布の近似
§5.3.1 大数の法則 law of large numbers

標本平均が標本数n→∞のとき母集団平均μに収束するという法則

◈チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequalityによる説明
- 平均、分散が $\mathrm{E}(X)=\mu,\ \mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ である確率変数Xについて任意の定数$c>0$に対して次の式が成立する。

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

- $\mathrm{E}(\overline{X}_n)=\mu,\ \mathrm{Var}(\overline{X}_n)=\sigma^2/n$ であるから、任意の $\varepsilon>0$に対して

$$P(|\overline{X}_n-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \quad よって \quad \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n-\mu| \geq \varepsilon) = 0$$

6/11/03 8

§5.3.1 大数の法則(2)

◈大数の法則 (Khintchine's law)
- 大数の弱法則ともいう

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を平均がμである、互いに独立な確率変数であるとき、すなわち、 $\mathrm{E}(X_i)=\mu$ and $X_i \perp X_j$ for $i \neq j$ であるとき、

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X}_n-\mu| < \varepsilon) = 1 \qquad \forall\varepsilon>0$$

が成立する。このことを $\overline{X}_n$ がμに確率収束するといい、

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad または、\quad \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu \quad と表す。$$

6/11/03 9

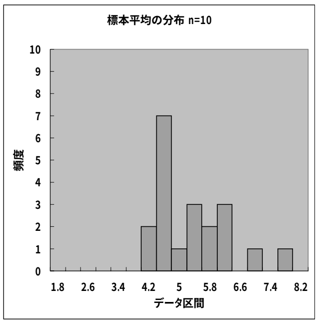
§5.3.1 大数の法則(3) 実例

◈大数の法則を確認するための実験

- *X*~N(5,16)にしたがう確率変数を *n*個抽出した標本を20ヶ作成。
- 20ヶの標本それぞれについて、標本平均 (算術平均) を求め、標本平均の分布 (ヒストグラム) を作成。
- *n*として、10, 40, 160, 1000を採用

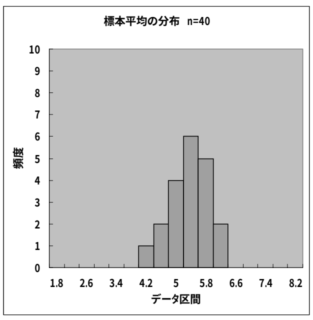
6/11/03 10

§5.3.1 大数の法則(4) 実例 n=10



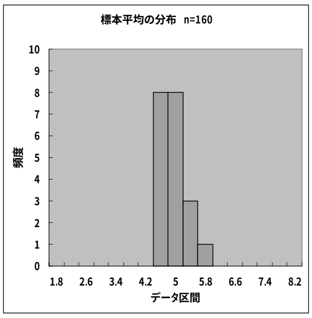
6/11/03 11

§5.3.1 大数の法則(5) 実例 n=40



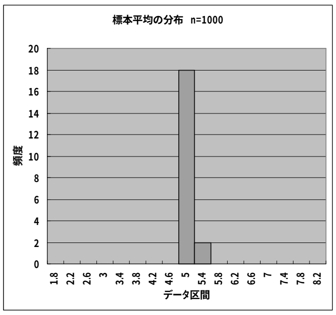
6/11/03 12

§5.3.1 大数の法則(6) 実例 n=160



6/11/03 13

§5.3.1 大数の法則(7) 実例 n=1000



6/11/03 14

