第16回　6月17日の授業内容

- §5.　標本分布
  - §5.3　統計量の分布の近似
    - §5.3.2　中心極限定理
    - §5.3.3　大数の法則と中心極限定理：再論

6/17/03　1

§5.3.2　中心極限定理

- 大数の法則
  - 標本平均がn→∞のとき、母集団平均μの一点分布になる。
  - $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)=\sigma^2/n \xrightarrow{P} 0$ であるし、また
    $\mathrm{Var}(n\overline{X}_n)=n\sigma^2 \xrightarrow{P} \infty$
  - そこで、$\mathrm{Var}(\delta\overline{X}_n)$ が0にも収束しないし、発散もしない定数δを探そう。
    ⇒ $\delta=\sqrt{n}$ 　がその解。

6/17/03　2

§5.3.2　中心極限定理(2)

- $\sqrt{n}\overline{X}_n$ の確率分布
  - モーメント　$\mathrm{E}\left(\sqrt{n}\overline{X}_n\right)=\sqrt{n}\mu$ 　$\mathrm{Var}\left(\sqrt{n}\overline{X}_n\right)=\sigma^2$
- 中心極限定理 Central Limit Theorem
  - Lindeburg-Lebyのバージョン
  - $X_1,X_2,\dots,X_n$を互いに独立な平均μ、分散σ²の確率変数とする。このとき、$n\to\infty$であれば、

$$\frac{\overline{X}_n-\mathrm{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

6/17/03　3

§5.3.2 中心極限定理(3)

◈中心極限定理が何故重要か

- 標本のデータから計算した統計量に基づいて推論を行う時の精度が評価できる（わかる）。
- X_iの確率分布を知らなくても、平均と分散が同一であることだけわかっていれば、標本平均の確率分布を正規分布で十分に近似できる。

6/17/03 4

§5.3.2 中心極限定理(4)

◈二項分布の正規近似

- X~Bin(n,p)とする。二項分布の再生性から、ベルヌイ分布W_i~Bin($1,p$)をもちいて、$X= W_1+\ldots+ W_n$で表すことができる。

$\overline{W}=X/n$ とおくと、$\mathrm{E}(\overline{W})=p$, $\mathrm{Var}(\overline{W})=p(1-p)/n$。

中心極限定理から、
$$\frac{\overline{W}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

よって十分にnが大ならば、Xを $N(np,np(1-p))$ で近似可能。

6/17/03 5

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論

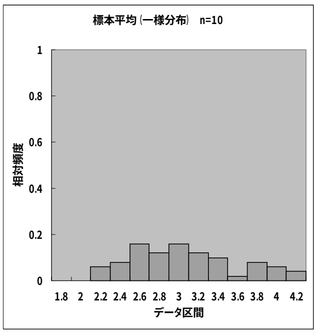
◈大数の法則と中心極限定理を確認するための実験(2)

- X~U(0,6)にしたがう確率変数をn個抽出した標本を50ヶ作成。
- 50ヶの標本それぞれについて、標本平均（算術平均）を求め、標本平均の分布（ヒストグラム）を作成。
- nとして、１０，４０，１６０，１０００，４０００を採用

$$\mathrm{E}\left(\overline{X}_n\right)=\frac{6+0}{2}=3,\quad \mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)=\frac{(6-0)^2}{12n}=\frac{3}{n}$$

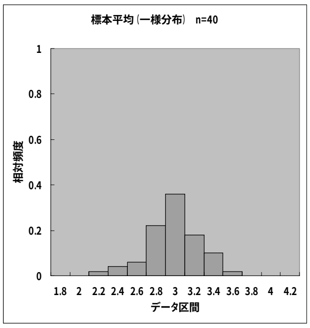
6/17/03 6

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論



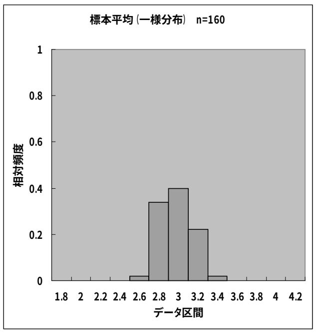
6/17/03 7

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論



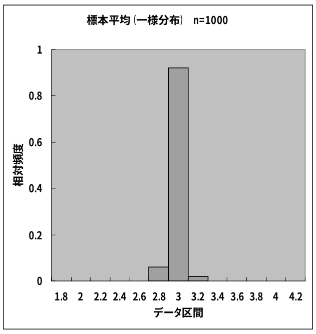
6/17/03 8

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論



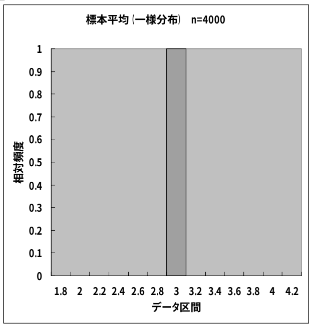
6/17/03 9

§5.3.3　大数の法則と中心極限定理：再論



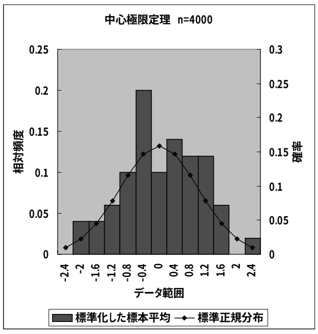
6/17/03　10

§5.3.3　大数の法則と中心極限定理：再論



6/17/03　11

§5.3.3　大数の法則と中心極限定理：再論



6/17/03　12

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論

◈二項分布の正規近似 (再)

- X~Bin(n,p)とする。二項分布の再生性から、ベルヌイ分布W_i~Bin(1,p)をもちいて、X= W_1+…+ W_nで表すことができる。

$\overline{W}=X/n$ とおくと、$\mathrm{E}(\overline{W})=p$, $\mathrm{Var}(\overline{W})=p(1-p)/n$。

中心極限定理から、

$$\frac{\overline{W}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

よって十分にnが大ならば、Xを $N(np, np(1-p))$ で近似可能。

6/17/03 13

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論

◈二項分布の正規近似

- 近似例： X~Bin(20, 0.4)の場合 E(X)=8, Var(X)=4.8
- P(X≦5)=0.1256
- 正規分布で近似

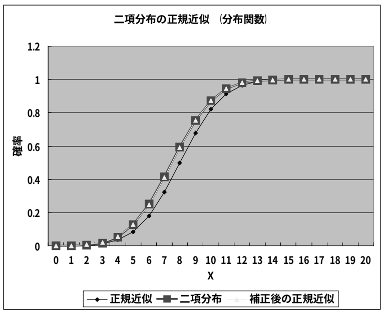
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 5)&=\mathrm{P}\left((X-8)/\sqrt{4.8}\le(5-8)/\sqrt{4.8}\right)\\&=\Phi\left(-3/\sqrt{4.8}\right)=\Phi(-1.369)=0.0855\end{aligned}$$

- 連続補正

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 5)&=\mathrm{P}\left((X+0.5-8)/\sqrt{4.8}\le(5+0.5-8)/\sqrt{4.8}\right)\\&=\Phi\left(-2.5/\sqrt{4.8}\right)=\Phi(-1.141)=0.1269\end{aligned}$$

6/17/03 14

§5.3.3 大数の法則と中心極限定理：再論



6/17/03 15