第18回 6月24日の授業内容

- ◈§6. 母数の推定
  - §6.2 点推定
    - §6.2.3 偏差2乗和の分布
  - §6.3 区間推定
    - §6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知)
    - §6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知)

6/24/03 1

§6.2.3 偏差2乗和の分布

- ◈X~N(0,1)であるとき、X^2の分布はどうなるか。
- ◈$Z=X^2 \sim \chi^2(1)$ 自由度1のカイ2乗分布
  - E(Z)=1, Var(Z)=2
  - 密度関数

$$f(z)=\frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{k/2-1}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\frac{1}{2} \qquad (z>0)$$

$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数を示し、$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$

6/24/03 2

§6.2.3 偏差2乗和の分布(2)

◈カイ2乗分布の再生性より、独立な自由度1のカイ2乗分布にしたがう確率変数の和

$Y=Z_1+Z_2+\ldots+Z_k$

もまたカイ2乗分布にしたがう。

$Y \sim \chi^2(k)$

$E(Y)=k$, $Var(Y)=2k$

6/24/03 3

§6.3 区間推定

◈ §6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知)

- 区間推定 interval estimation

  「だいたい、この位」という形の推定法を数学的に定式化したもの。

  「だいたい」⇒ (推定の) 信頼度を表す。

  「この位」 ⇒推定した値の範囲。

6/24/03 4

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (2)

◈簡単なケース： X_i〜N (μ, σ²)

- μの推定量として標本平均 $\overline{X}_n$ を採用
- $\overline{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ であるから、以下の関係が成立。

$$\mathrm{P}\left(\mu - 2\sqrt{\sigma^2/n} < \overline{X}_n \le \mu + 2\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.955$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - 2\sqrt{\sigma^2/n} < \mu \le \overline{X}_n + 2\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.955$$

信頼度

6/24/03 5

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (3)

◈前述の方法は、正規分布の性質を用いている。

◈いま、X〜N(d, w²)とすると、

- P(d-w＜X≦d+w)=0.6826
- P(d-2w＜X≦d+2w)=0.9550
- P(d-3w＜X≦d+3w)=0.9973

◈同様に、Z〜N(0, 1)とすると、

- P(-1＜Z≦1)=0.6826
- P(-2＜Z≦2)=0.9550
- P(-3＜Z≦3)=0.9973

⇨ 標準正規分布表

6/24/03 6

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (4)

- 標準正規分布表 (教科書p.296：付表3) の読み方
  - Z〜N(0, 1)であるとき、Φ(x)≡P(Z≦x) を表にしたもの。

小数第一位 ↓ 小数第二位

x	.00	.01	…	.04	…	.06
.0	.5000	.5040		.5160		.5239
.1	.5398	.5438		.5557		.5636
.2	.5793	.5832		.5948		.6026
…						
1.0	.8413	.8438		.8508		.8554
…						
1.6	.9452	.9463		**.9495**		.9515
…						
1.9	.9713	.9719		.9738		**.9750**
2.0	.9773	.9778		.9793		.9803
2.1	.9821	.9826		.9838		.9846

6/24/03 7

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (5)

- **標準正規分布表より**
  - Φ(1.64)=0.9495
  - Φ(1.96)=0.9750
  - Φ(2.00)=0.9773
- P(-1.96<Z≦1.96)=Φ(1.96)−Φ(-1.96)
  =Φ(1.96)−(1−Φ(1.96))
  =2Φ(1.96)−1=<u>0.95</u> ← 信頼係数

6/24/03 8

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (6)

- 一般にαを決めて、対応するbを探す。
  P(-b<Z≦b)=2Φ(b)−1=<u>α</u> ← 信頼係数
- X〜N(d, w^2)のときには、(X−d)/w〜N(0, 1)であるから、Z= (X−d)/wとして
  P(-b<(X-d)/w≦b)=P(X−wb<d≦X+wb)
  =2Φ(b)−1=α

6/24/03 9

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (7)

- 以上をまとめると、
  - α=0.90のとき

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - 1.64\sqrt{\sigma^2/n} < \mu \le \overline{X}_n + 1.64\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.90$$

  - α=0.95のとき

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} < \mu \le \overline{X}_n + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 0.95$$

6/24/03 10

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が既知) (8)

- 以上の説明は、X_i〜N(μ, σ²) を仮定。
- しかし、一般のケースでも標本数nが十分に大きければ、中心極限定理より標本平均の分布は正規分布に収束するので、同様に推定することができる。

6/24/03 11