第19回 6月25日の授業内容

- §6. 母数の推定
  - §6.3 区間推定
    - §6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知)

6/25/03 1

§6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知) (1)

- 再び X_i〜N (μ, σ^2) を仮定しよう。
- 区間推定は

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - b\sqrt{\sigma^2/n} < \mu \le \overline{X}_n + b\sqrt{\sigma^2/n}\right) = \alpha$$

のように行うため、σ^{2}が未知のときには、区間の計算ができない。

⇩

σ^{2}を推定量で置換えることはできるのか？

6/25/03 2

§6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知) (2)

- 標本平均 $\overline{X}_n$を標準化するとき、σ^{2}を推定量

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

で置換えると、分布が異なってしまう。

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \sim t(n-1)$$

異なる分布

6/25/03 3

§6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知) (3)

◈t分布：Student-t distribution

- Z〜N(0,1)、W〜$\chi^2(k)$ で、ZとWが独立であるとき、

$$Q = \frac{Z}{\sqrt{W/k}} \sim t(k) \quad \text{自由度}k\text{の}\,t\,\text{分布}$$

- 密度関数

$$f(q;k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{k}q^2\right)^{-(k+1)/2}$$

6/25/03 4

§6.3.2 母平均の推定 (母分散が未知) (4)

◈t分布の性質

- 標準正規分布同様、0を中心に左右対称なベル型の密度関数をもつ。
- 標準正規分布よりも分布の裾（すそ）が厚い。
- Q〜t(k)であるとき、
  - E(Q)=0 k>1のとき
  - <u>k≦1の時は、平均は存在しない。</u>
  - Var(Q)=k/(k-2) k>2のとき
  - <u>k≦2の時は分散は存在しない。</u>

6/25/03 5

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (5)

◈t分布表：教科書p297 付表4

◈ 分布関数F(b)=P（Q≦b）=1-*p*より、G(b)≡1-F(b)=P(Q>b)=*p*を定義する。Gの逆関数b=$G^{-1}(p)$を数表にしたもの。

	p				
自由度k	0.250	…	0.050	0.025	…
1	1.000		6.314	12.710	
2	0.817		2.920	4.303	
3	0.766		2.354	3.182	
…					
10	0.700		1.813	2.228	
…					
100	0.677		1.660	1.984	
∞	**0.674**		**1.645**	**1.960**	

標準正規分布 → ∞

6/25/03 6

§6.3.2　母平均の推定
(母分散が未知) (6)

◈ $\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ が自由度k=n-1のt分布にしたがうことの証明

$\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ の分子、分母をσで割ると、

$$\frac{(\overline{X}_n-\mu)/\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}/\sigma}=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\div\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}=\frac{A}{\sqrt{B}}$$

となる。分子のAは、A〜N(0,1)。

一方、Bは

$$B=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{1}{(n-1)\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

次ページへ

§6.3.2　母平均の推定
(母分散が未知) (7)

前ページより

実は $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$

は、自由度n-1のカイ2乗分布にしたがう確率変数であるから、Bは自由度
n-1のカイ2乗分布にしたがう確率変数を自由度で割ったものに等しい。

以上のことと、t分布の定義より

$\dfrac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ は自由度n-1のt分布にしたがうことがわかる。　■

§6.3.1　母平均の推定
(母分散が未知) (8)

◈母平均の区間推定

- 分散の推定量で標準化した標本平均Qは、Q〜t (n-1) 。
- 一般に信頼係数αを決めて、pを求め、Gの逆関数b=$G^{-1}(p)$から対応するbを探す。

P(-b<Q≦b)=P(-$G^{-1}(p)$<Q≦$G^{-1}(p)$)
=F(b)-F(-b)=F(b)-(1-F(b))
=2F(b)-1=2(1-G(b))-1
=1-2p= **α**

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (9)

◈推定例：7/2/02の睡眠時間の母平均
- 標本数 5
- データ(分)： 420, 360, 360, 480, 320
- 計算式 $X_i - \overline{X}_n$ $\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$

#id	X	X-Xbar	(X-Xbar)**2
1	420	32	1024
2	360	-28	784
3	360	-28	784
4	480	92	8464
5	320	-68	4624
Total	1940	0	15680

6/25/03 10

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (10)

◈推定例(続)
- これより平均μ、分散σ²の不偏推定量は、

$$\hat{\mu} = \overline{X}_n = 1940/5 = 388$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{15680}{4} = 3920$$

よって

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{5}} = \sqrt{\frac{3920}{5}} = \sqrt{784} = 28$$

次ページへ

6/25/03 11

§6.3.1 母平均の推定 (母分散が未知) (11)

前ページより

- 信頼係数αを0.95とすると、
  - p=0.025、自由度k=5-1=4であるから、t分布表より、$G^{-1}(0.025;k=4)=2.776$
- よって、

$$\mathrm{P}(-b < Q \le b) = \mathrm{P}\left(\overline{X}_n - b\sqrt{\hat{\sigma}^2/n} < \mu \le \overline{X}_n + b\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}\right)$$

$$= \mathrm{P}(388 - 2.777 \times 28 < \mu \le 388 + 2.777 \times 28)$$

$$= \mathrm{P}(310.2 < \mu \le 465.8) = 0.95$$

区間推定

6/25/03 12