第22回 7月8日の授業内容

◈ §7. 母数の検定
- §7.2 母平均の検定 (母分散が既知)
- §7.3 母平均の検定 (母分散が未知)
- §7.4 母平均の検定 (分布も母分散も共に未知)

7/8/03 1

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知)

◈母平均μの検定
- 母平均の推定量 $\hat{\mu} = \overline{X}_n$ を用いて検定
- 仮説
  - 帰無仮説 H_0: μ＝u (例えばu=5)
  - 対立仮説 H_1: μ＞u
- 有意水準: α (×100%) :慣例として%表示

7/8/03 2

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知) (2)

◈検定例:睡眠時間
- X_i～N (μ,2000) であるものとする。
- 5人からなる標本データ :

  420, 360, 360, 480, 320
- 仮説
  - 帰無仮説 H_0: μ＝330
  - 対立仮説 H_1: μ＞330
- 有意水準: 0.05 (=5%)

7/8/03 3

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知) (3)

◈検定例：睡眠時間 (続)
- 母平均の推定量の分布
  - $\hat{\mu} = \overline{X}_5 \sim \mathrm{N}(\mu, 400)$
- 帰無仮説が正しいときの母平均推定量の分布
  - $\hat{\mu} = \overline{X}_5 \sim \mathrm{N}(330, 400)$
- 帰無仮説が正しいときに母平均推定量が推定値388以上である確率←標準正規分布表

$$\mathrm{P}(\overline{X}_5 > 388) = \mathrm{P}((\overline{X}_5 - 330)/20 > (388-330)/20)$$
$$= \mathrm{P}(Z > 2.9) = 1 - .9981 = 0.0019$$

<0.05=α

7/8/03 4

§7.2 母平均の検定 (母分散が既知) (4)

◈検定例：睡眠時間 (続)
- 結論： 0.0019＜0.05= α より帰無仮説を棄却。
- X_iが正規分布にしたがわない時でも、中心極限定理より標本数nが大きければ同様に検定可能。

7/8/03 5

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知)

◈母分散σ^{2}が未知の場合でも、母平均μに関する仮説検定は、母分散σ^{2}が既知の場合とほぼ同様。

◈異なる点 ⇒ 検定統計量 (=基準化した算術平均) の分布
- σ^{2}が既知： 標準正規分布 $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$
- σ^{2}が未知： 自由度n-1のt分布 $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \sim t(n-1)$

7/8/03 6

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知) (2)

◈検定例：睡眠時間
- X_i～N (μ, σ²) であるものとする。
- 5人からなる標本データ：

  420, 360, 360, 480, 320
- 仮説
  - 帰無仮説 H_0: μ＝330
  - 対立仮説 H_1: μ＞330
- 有意水準： 0.05 (=5%)

7/8/03 7

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知) (3)

◈検定例：睡眠時間 (続)

$$Q=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}\sim t(n-1)$$

ところで、$\sqrt{\hat{\sigma}^2/5}=\sqrt{3920/5}=28$、帰無仮説より$\mu=330$。

また母平均の推定値は$\overline{X}_5=388$。

よって、 $\mathrm{P}(Q>(388-330)/28)=\mathrm{P}(Q>2.07)$

有意水準は5%であるから、自由度4のt分布表より、

$\mathrm{P}(Q>2.132)=0.05<\mathrm{P}(Q>2.07)$

よって帰無仮説$\mu=330$は有意水準5%で棄却できない

（採択する）。

7/8/03 8

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知) (4)

◈「チャート式」統計的検定の手順
- ①帰無仮説μ＝uと対立仮説μ＜u (またはμ＞u) を確認する。
- ②有意水準α (×100%) を設定。
- ③標本データから算術平均 $\overline{x}_n$ を求める。
- ④ 〃 から不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ を求める。
- ⑤母平均の推定量 $\hat{\mu}=\overline{X}_n$ の分散 $\hat{\sigma}^2/n$ を計算。
- ⑥ 帰無仮説の下でのt検定統計量 $\tau=\dfrac{\overline{x}_n-u}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}}$ を計算。

次ページへ

7/8/03 9

§7.3 母平均の検定 (母分散が未知) (5)

◈「チャート式」統計的検定の手順 (続)

- ⑦自由度n-1のt分布表から上側αの境界点$t_\alpha(n-1)$を得る。
- ⑧ {H_1 : μ＞uのとき}
  - τ＞$t_\alpha(n-1)$ ⇒ H_0を棄却 (H_1を採択)
  - τ＜$t_\alpha(n-1)$ ⇒ H_0を棄却できない (H_0を採択)

  {H_1 : μ＜uのとき}
  - τ＜ - $t_\alpha(n-1)$ ⇒ H_0を棄却 (H_1を採択)
  - τ＞ - $t_\alpha(n-1)$ ⇒ H_0を棄却できない (H_0を採択)

7/8/03 10

§7.4 母平均の検定 (分布も母分散も共に未知)

◈X_iが正規分布にしたがわない場合

- 中心極限定理より標本数nが大きければ

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

- 中心極限定理が成立するような標本数nにおいては、大数の法則 (LLN)が成立するから

$$\hat{\sigma}^2 \approx \sigma^2$$

7/8/03 11

§7.4 母平均の検定 (分布も母分散も共に未知) (2)

⇩

- したがって、分散の推定量 $\hat{\sigma}^2$ で置き換えても、標準正規分布表を使って検定

$$Q = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \approx \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

7/8/03 12

