第24回 7月15日の授業内容

- §7. 母数の検定
  - §7.6 二標本問題 (平均の同等性の検定)

7/15/03 1

§7.6 二標本問題 (平均の同等性の検定)

- 問題設定
  - n個からなる標本Aとm個からなる標本Bを考えよう。
  - 標本A、標本Bは以下の正規母集団からのランダム標本であるとする。

$$標本A: X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad i = 1, \dots, n$$

$$標本B: Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \quad j = 1, \dots, m$$

7/15/03 2

§7.6 二標本問題 (平均の同等性の検定) (2)

- 仮説
  - 標本Aに対応する母集団の平均 (母平均) μ_X と標本Bに対応する母平均 μ_Y が等しいかどうかを検定したい。
  - 帰無仮説と対立仮説

$$\begin{cases} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X \neq \mu_Y \\ H_2: \mu_X < \mu_Y \quad (\text{or} \quad H_2: \mu_X > \mu_Y) \end{cases}$$

7/15/03 3

§7.6 二標本問題(平均の同等性の検定) (3)

◈検定統計量の導出

- μ_X, μ_Y の推定量の分布
  - μ_X の推定量として標本平均 $\hat{\mu}_X = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ を採用すると、
    $\hat{\mu}_X = \overline{X}_n \sim \mathrm{N}(\mu_{X,}\ \sigma_X^2 / n)$
  - 同様に μ_Y の推定量として標本平均 $\hat{\mu}_Y = \overline{Y}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$ を採用すると、
    $\hat{\mu}_Y = \overline{Y}_n \sim \mathrm{N}(\mu_{Y,}\ \sigma_Y^2 / m)$
  - 以上より $d \equiv \overline{X}_n - \overline{Y}_m (= \hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y) \sim \mathrm{N}\left(\mu_X - \mu_{Y,}\ \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$

7/15/03 4

§7.6 二標本問題(平均の同等性の検定) (4)

- 帰無仮説H_0が正しいときの統計量dの分布
  $d \equiv \overline{X}_n - \overline{Y}_m \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$

  を用いて検定を行なう。
- ①σ_X^2, σ_Y^2 がともに既知の場合
  $r = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$ は H_0が正しければ標準正規分布 N(0,1)にしたがう

次ページへ

7/15/03 5

§7.6 二標本問題(平均の同等性の検定) (5)

前ページより

- 対立仮説がH_1であるとき、
  Φ(r)<α/2 (r<0のとき)
  または
  1−Φ(r)<α/2 (r>0のとき)
  であればH_0を棄却
- 対立仮説が H_2: $\mu_X < \mu_Y$ であるとき、
  Φ(r)<α (r<0)
  であれば、H_0を棄却

7/15/03 6

§7.6 二標本問題 (平均の同等性の検定) (6)

- ② $\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$ であるが未知のとき

⇒ σ^2 を推定量 $\hat{\sigma}^2$ で置き換える。

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2+\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y}_m)^2}{n+m-2}$$

- H_0が正しいとき (H_0のもとでは)

$$\tau=\frac{\overline{X}_n-\overline{Y}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}}\sim t(n+m-2)$$ ← 自由度$n+m-2$のt分布

次ページへ

7/15/03 7

§7.6 二標本問題 (平均の同等性の検定) (7)

前ページより

- 対立仮説がH_1であるとき、

$\tau<-t_{\alpha/2}(n+m-2)$ ($\tau<0$のとき)

または

$\tau>t_{\alpha/2}(n+m-2)$ ($\tau>0$のとき)

自由度$n+m-2$のt分布の上側$\alpha/2$点

であればH_0を棄却

- 対立仮説が H_2: $\mu_X<\mu_Y$ であるとき、

$\tau<-t_{\alpha}(n+m-2)$ ($\tau<0$のとき)

であれば、H_0を棄却

7/15/03 8

§7.6 二標本問題 (平均の同等性の検定) (8)

- ③ $\sigma_X^2\neq\sigma_Y^2$ でかつ未知
  - n,mがともに大きければ中心極限定理を使って①の方法で検定することができる。
  - $\hat{\sigma}_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2,\ \hat{\sigma}_Y^2=\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y}_m)^2$ として分散を推定。
  - $\tilde{r}=\frac{\overline{X}_n-\overline{Y}_m}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}+\frac{\hat{\sigma}_Y^2}{m}}}$ はH_0が正しければ$n,m\to\infty$のとき N(0,1)にしたがう。

7/15/03 9