

エコノメトリックスII/上級エコノメトリックス 04 宿題3

2003年12月1日

(提出期限: 2004年12月8日授業終了時。提出用紙はA4に限る。)

次の問に答えなさい。

1. n 個の標本データ (Y_i, \mathbf{x}_i') ($i = 1, \dots, n$) について線形回帰モデル

$$\begin{aligned} y_i &= \mathbf{x}_i' \beta + \epsilon_i \\ \epsilon_i &\sim i.i.d.N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

が成立しているものと考えよう。

- $i = 0$ の時も上の線形回帰モデルが成立しているとして、 x_0 が与えられたときに OLS 推定されたモデルを用いて y_0 の予測量 \hat{y}_0 を求めなさい。
- \hat{y}_0 の予測誤差とその期待値を求めなさい。
- \hat{y}_0 の平均 2 乗誤差 (MSE) を求め、それが予測誤差の分散と等しいことを示しなさい。
- $\mathbf{x}_i = (1, x_{2,i})'$ とするとき、 \hat{y}_0 の予測誤差の分散が

$$\text{Var}(\hat{y}_0) = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

となることを示しなさい。ここで $\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^n x_i$ である。

2. 対称行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1.6 \end{pmatrix}$$

を固有値分解 $\mathbf{A} = \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z}'$ し、 \mathbf{Z} および $\mathbf{\Lambda}$ を求めなさい。ただし、

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

であり、 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする。

また、 $\mathbf{Z}' \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \mathbf{Z}' = \mathbf{I}$ となること、および $\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{Z} \mathbf{A} \mathbf{Z}' \mathbf{\Lambda}^{-1/2} = \mathbf{I}$ となることを確認しなさい。

3. AR(1) 構造をもつ攪乱項 ϵ の分散共分散行列が

$$E(\epsilon\epsilon') = \eta^2 \frac{1}{1-0.36} \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.36 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.36 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} = \eta^2 \Omega$$

で表されるとき、固有値分解 $\Omega = Z\Lambda Z'$ し、 Z および Λ を求めなさい。ただし、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

であり、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする。

また、

$$\Lambda^{-1/2} Z = \begin{pmatrix} \sqrt{1-0.36} & 0 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

および $\Lambda^{-1/2} Z \Omega Z' \Lambda^{-1/2} = I$ となることを確認しなさい。