エコノメトリックス2　04　宿題　解答

2005年1月26日

1

(a) $\boldsymbol{\beta}$ の最小 2 乗推定量を $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ で表すと、

$$\hat{y_0} = \boldsymbol{x}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{x}_0'\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i y_i\right)$$

(b) $\hat{y_0}$ の予測誤差を $\hat{\epsilon_0}$ で表すと、

$$\hat{\epsilon_0} = y_0 - \hat{y_0} = \boldsymbol{x}_0'(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) + \epsilon_0$$

となる。$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ が不偏推定量であることと、撹乱項 ϵ_0 の期待値が 0 となることより、期待値は

$$\mathrm{E}\hat{\epsilon_0} = \boldsymbol{x}_0'(\boldsymbol{\beta} - \mathrm{E}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \mathrm{E}\epsilon_0 = 0$$

となる。

(c) $\mathrm{E}\hat{y_0} = \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{\beta}$ であるから、$\hat{y_0}$ の平均 2 乗誤差は、

$$MSE(\hat{y_0}) = \mathrm{E}(\hat{y_0} - y_0)^2 = \boldsymbol{x}_0'\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{E}\epsilon_o^2 = \sigma^2\left\{1 + \boldsymbol{x}_0'\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\boldsymbol{x}_0\right\}$$

となる。他方、$\hat{y_0}$ の予測誤差 $\hat{\epsilon_0}$ の分散は、$\mathrm{E}\hat{\epsilon_0} = 0$ より

$$\mathrm{Var}\hat{\epsilon_0} = \mathrm{E}\hat{\epsilon_0}^2 = \mathrm{E}(y_0 - \hat{y_0})^2 = MSE(\hat{y_0})$$

となって $\hat{y_0}$ の平均 2 乗誤差と等しくなる。

(d) (c) の結果より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\hat{\epsilon_0} &= \sigma^2\left\{1 + \boldsymbol{x}_0'\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1}\boldsymbol{x}_0\right\} \\
&= \sigma^2\left\{1 + \begin{pmatrix} 1 & x_{2,0} \end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & x_{2,i} \\ x_{2,i} & x_{2,i}^2 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ x_{2,0} \end{pmatrix}\right\} \\
&= \sigma^2\left\{1 + \begin{pmatrix} 1 & x_{2,0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n & n\bar{x}_2 \\ n\bar{x}_2 & \sum_{i=1}^{n} x_{2,i}^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ x_{2,0} \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 & x_{2,0} \end{pmatrix} \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_{2,i}^2 - n\bar{x}_2^2} \begin{pmatrix} (1/n)\sum_{i=1}^n x_{2,i}^2 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \sigma^2 \left\{ 1 + \frac{(1/n)\sum_{i=1}^n x_{2,i}^2 - 2\bar{x}_2 x_{2,0} + x_{2,0}^2}{\sum_{i=1}^n x_{2,i}^2 - n\bar{x}_2^2} \right\} \\
&= \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)
\end{aligned}
$$

2

答えだけを示すと、$\lambda_1 = 1.8,\ \lambda_2 = 0.8$。$\lambda_1$ に対応する固有ベクトルは $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})'$ であり、λ_2 に対応する固有ベクトルは $(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})'$。よって、

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}
$$

確認は各自で。

３．手計算は大変なので、MATLAB による計算結果を示す。

```
Using Toolbox Path Cache.  Type "help toolbox_path_cache" for more info.

  ようこそ MATLAB へ。初めての方はメニューから"MATLAB ヘルプ"を選択してください。

>> a=[1 0.6 0.36; 0.6 1 0.6 ; 0.36 0.6 1 ]

a =

    1.0000    0.6000    0.3600
    0.6000    1.0000    0.6000
    0.3600    0.6000    1.0000

>> omega=a/0.64   :行列Ω

omega =

    1.5625    0.9375    0.5625
    0.9375    1.5625    0.9375
    0.5625    0.9375    1.5625

>> [z,lambda]=eig(omega)  ：固有ベクトル（Z）と固有値（Λ）を求める

z =

   -0.4451   -0.7071    0.5494
    0.7770   -0.0000    0.6295
   -0.4451    0.7071    0.5494


lambda =

    0.4884         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    3.1991

（固有値が小さい順に並んでいることに注意）

>> zz=z*z'

zz =

    1.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.0000    1.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000    1.0000

>> zzz=z'*z

zzz =

    1.0000         0   -0.0000
         0    1.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000

>> omegi=inv(omega)   :Ωの逆行列

omegi =

    1.0000   -0.6000    0.0000
   -0.6000    1.3600   -0.6000
    0.0000   -0.6000    1.0000

>> r1=chol(omegi)   ：Ω^(-1)の Cholesky 分解

r1 =

    1.0000   -0.6000    0.0000
         0    1.0000   -0.6000
         0         0    0.8000

>> rr2=r1'*r1

rr2 =

    1.0000   -0.6000    0.0000
   -0.6000    1.3600   -0.6000
    0.0000   -0.6000    1.0000

>>
```