エコノメトリックス2 04 宿題 解答

2005年1月19日

宿題1

次の問いに答えなさい。

連続確率変数 z と w がある。w を条件としたときの z の条件付期待値が条件に依存しない、すなわち

$$\mathrm{E}(z|w) = \delta$$

（但し δ は定数）であるとき、z の無条件期待値が条件付期待値と一致する、すなわち

$$\mathrm{E}(z) = \mathrm{E}(z|w) = \delta$$

となることを示しなさい。

解答

確率変数 z と w の密度関数をそれぞれ $g(z),\ h(w)$、同時密度関数を $f(z,w)$ とすると、w を条件としたときの z の条件付期待値は

$$\mathrm{E}(z|w) = \int z\frac{f(z,w)}{h(w)}dz = \delta$$

と表される。ところで z の無条件期待値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(z) &= \int zg(z)dz \\
&= \int z(\int f(z,w)dw)dz = \int(\int z\frac{f(z,w)}{h(w)}dz)h(w)dw \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}(z|w)] \\
&= \int \delta h(w)dw = \delta\int h(w)dw = \delta
\end{aligned}$$

よって示された。

宿題 2

単回帰モデル

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

を考える。撹乱項 ϵ_i については古典的仮定 (A1),(A2),(A3'),(A4) をおくものとする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\boldsymbol{x}_i = (1,\ x_{2i})'$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ \beta_2)'$ とするとき、単回帰モデルをベクトルを使って表現しなさい。

(2) ベクトルを使って、$\boldsymbol{\beta}$ の OLSE $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を表記しなさい。

(3) (2) で得た表記の計算を実際に行い、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x_2})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x_2})^2} \\ \hat{\beta}_1 &= \bar{y} - \beta_2 \bar{x_2}\end{aligned}$$

となることを確認しなさい。ただし、$\bar{w} = (1/n)\sum_{i=1}^n w_i$ である。

(4) $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2)$ を求めなさい。

解答

(1) $y_i = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n)$

(2) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i y_i\right)$

(3) $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を要素を明示したベクトル・行列表現で表すと、

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - (\sum_{i=1}^n x_{2i})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & -\sum_{i=1}^n x_{2i} \\ -\sum_{i=1}^n x_{2i} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - (n\bar{x}_2)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & -n\bar{x}_2 \\ -n\bar{x}_2 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n\bar{y}\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - n\bar{x}_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i}{n\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - (n\bar{x}_2)^2} \\ \\ \frac{n\sum_{i=1}^n x_{2i} y_i - n^2 \bar{x}\bar{y}}{n\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - (n\bar{x}_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n x_{2i} y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - n\bar{x}_2^2} \\ \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i} y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - n\bar{x}_2^2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより明らか。

(4) $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の分散共分散行列は、$\mathrm{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\ \hat{\beta}_1) & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} = \frac{\sigma^2}{n\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - (\sum_{i=1}^n x_{2i})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & -\sum_{i=1}^n x_{2i} \\ -\sum_{i=1}^n x_{2i} & n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2) = -\frac{\sigma^2 \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 - n\bar{x}_2^2}$$