エコノメトリックスII 講義ノート 第5回

2005年11月2日

FWL Theorem

text p.66-67の解説

$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1$ の証明

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ を分割行列を使って表すと、

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}$$

となる。いま $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ を

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

で表すと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} &\equiv \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1' \\ \boldsymbol{X}_2' \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1' + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1' + \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}'\boldsymbol{X}_2' + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 \end{aligned}$$

となる。

次に、$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}$ であるから、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1) + \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2) + \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2) \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1) & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}_1 &= (\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1' + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1' + \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}'\boldsymbol{X}_2' + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2')\boldsymbol{X}_1 \\ &= \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1) + \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1)) + \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_1)) \\ &= \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{O} \\ &= \boldsymbol{X}_1 \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1$ の証明

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{P}_1 &= \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1) \\
&= (\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}_1)(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1 \\
&= \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{P}_1 \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$