

エコノメトリックス II '07 第7回講義補足資料

Gauss-Markov 定理の証明

2007 年 11 月 14 日

β の任意の線型推定量を $\tilde{\beta}$ とすると、

$$\tilde{\beta} = Z y$$

と表現できる。ここで

$$Z \equiv (D + X'X)^{-1}X'$$

である。 $\tilde{\beta}$ の条件付期待値をとると

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta} | X, D) &= E\{(D + (X'X)^{-1}X')(X\beta + u) | X, D\} \\ &= \beta + DX\beta + E\{(D + (X'X)^{-1}X')u | X, D\} \\ &= \beta + DX\beta + (D + (X'X)^{-1}X')E(u | X, D) \\ &= \beta + DX\beta \end{aligned}$$

$\tilde{\beta}$ が不偏推定量であるとき、

$$DX = O$$

が満たされなくてはならない。

次に $\tilde{\beta}$ の条件付分散を求めよう。

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{\beta} | X, D) &= E\{(D + (X'X)^{-1}X')uu'(D + (X'X)^{-1}X')' | X, D\} \\ &= (D + (X'X)^{-1}X')\sigma^2 I_n (D + (X'X)^{-1}X')' \\ &= \sigma^2 (D + (X'X)^{-1}X')(D' + X(X'X)^{-1}) \\ &= \sigma^2 \{DD' + DX(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'D' + (X'X)^{-1}\} \end{aligned}$$

とかけるが、 $\tilde{\beta}$ が不偏推定量であれば $DX = O$ より

$$\text{Var}(\tilde{\beta} | X, D) = \sigma^2 \{DD' + (X'X)^{-1}\}$$

従って、 β の線形不偏推定量のうち、 $D = O$ であるものが最も分散が小さいことが示された。