

エコノメトリックスII 宿題解答例(1) 訂正版

2008年10月30日

Q. 1.11

まず、最初に $E_{X_1, X_2}(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2)) = 0$ であることを示す。

$$\begin{aligned} E_{X_1, X_2}(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2)) &= E_{X_2} E_{X_1}(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2)|X_2) \\ &= E_{X_2}(E_{X_1}(X_1|X_2) - E_{X_1}(X_1|X_2)) = E_{X_2}0 = 0 \end{aligned}$$

また期待値繰り返しの公式を使うと

$$\begin{aligned} \text{Cov}(E_{X_1}(X_1|X_2), X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2)) &= E_{X_1, X_2}((E_{X_1}(X_1|X_2) - E_{X_1, X_2}(E_{X_1}(X_1|X_2))) \\ &\quad (X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2))) \\ &= E_{X_1, X_2}(E_{X_1}(X_1|X_2)(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2))) \\ &\quad - E_{X_1, X_2}(E_{X_1}(X_1|X_2))E_{X_1, X_2}(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2)) \\ &= E_{X_2}(E_{X_1}(E_{X_1}(X_1|X_2)(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2))|X_2)) \\ &= E_{X_2}(E_{X_1}(X_1|X_2)E_{X_1}(X_1 - E_{X_1}(X_1|X_2))|X_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって、共分散がゼロとなることが示せた。

Q. 1.20

$X = (1, X_1, X_2)$ であるから、

$$X'X = \begin{pmatrix} 1' \\ X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'1 & 1'X_1 & 1'X_2 \\ X_1'1 & X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'1 & X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}$$

分割した小行列の次元は

$$[k \times k] = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times k_1 & 1 \times k_2 \\ k_1 \times 1 & k_1 \times k_1 & k_1 \times k_2 \\ k_2 \times 1 & k_2 \times k_1 & k_2 \times k_2 \end{bmatrix}$$

また、 $X'X$ の左上の小行列は、

$$\mathbf{1}'\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n 1 \times 1 = n$$

である。

Q. 2.4¹

ノルムおよび内積は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\|x\| &= (x'x)^{1/2} = \sqrt{5.18} = 2.276 \\ \|y\| &= (y'y)^{1/2} = \sqrt{39.85} = 6.313 \\ \langle x, y \rangle &= x'y = 14.2\end{aligned}$$

内積の定義より $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$ であるから、

$$\cos\theta = \frac{x'y}{\|x\|\|y\|} = \frac{14.2}{2.276 \times 6.313} = 0.9883$$

よって、

$$\theta = \cos^{-1} 0.9883 = 0.0487\pi = 0.1529\text{radians}$$

¹10/30/08 訂正