エコノメトリックスII 宿題解答例 (10&11)

2009 年 1 月 28 日

宿題第 10 回

Q. 6.10

設問のモデルをまとめると、

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

となるが、u_{t-1} を $y_{t-1} - \boldsymbol{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}$ に、u_{t-2} を $y_{t-2} - \boldsymbol{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}$ に置き換える。最初の 2 つの観測値を所与とすれば、元のモデルは次の非線形回帰モデルに書き換えることができる。

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + \rho_1(\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}) + \rho_2(\boldsymbol{y}_{t-2} - \boldsymbol{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t \tag{1}$$

次に、OLS 推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を得るために、y_t を $\boldsymbol{X}_t$ 上に回帰させる必要がある。また GNR の独立変数を得るために、以下のように (1) 式の回帰式をパラメータについて微分しなければならない。

$$\begin{aligned}
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{X}_t - \rho_1\boldsymbol{X}_{t-1} - \rho_2\boldsymbol{X}_{t-2} \\
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\rho_1 &= y_{t-1} - \boldsymbol{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta} \\
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\rho_2 &= y_{t-2} - \boldsymbol{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

GNR の従属変数と独立変数は（帰無仮説の）制約付推定量 $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, 0, 0)$ で評価される。この GNR の被説明変数（従属変数）は $\hat{u}_t = \quad y_t - \boldsymbol{X}_t\hat{\beta}$。また $\boldsymbol{\beta}$ に対応する独立変数のベクトルは $\boldsymbol{X}_t$ であり、ρ_i $(i = 1, 2)$ に対応する独立変数は $\hat{u}_{t-i}$ である。よってテストの回帰は以下の通り。

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{b} + r_1\hat{u}_{t-1} + r_2\hat{u}_{t-2} + \text{residual.} \tag{2}$$

この回帰式における $r_1 = r_2 = 0$ の検定ための F 統計量は、元のテスト統計量と等しくなる。これは (2) 式の回帰式の制約なしモデルの SSR と y_t を $\boldsymbol{X}_t$ のみに回帰した制約付モデルの SSR を使って計算できる。これらの 2 つの回帰モデルの推定は同じサンプル期間で行われなければならない。よって、最初の 2 つの観測値を除くか、観測できないラグ付残差を 0 で置き換えるか、のどちらかの対応をする必要がある。

宿題第 11 回

Q. 7.2

$\boldsymbol{\Omega}$ は正値定符号 (positive definite) の対称行列であるから、その逆行列を

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}'$$

に分解できる。この関係を用いて (7.11) 式を書き直すと、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X} \quad & - \quad \boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}')^{-1}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\Psi}'^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\Psi}'^{-1})\boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}')\boldsymbol{Z} \\
&= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\boldsymbol{Z} \equiv \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{W}$$
$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R})$$

$\boldsymbol{M}$ は直交射影行列であるので、正値定符号。テキスト p.99 に書かれた性質を用いれば、$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}$ は非負値定符号 (positive semidefinite) であることが分かる。