エコノメトリックスII 宿題解答例 (3)

2008年11月12日

Q. 2.10

まず $\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'$ がべき等行列 (idempotent matrix) であることを示す。

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{P}$$

しかし、

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

であるので、$\mathcal{S}(\boldsymbol{X}) \neq \mathcal{S}(\boldsymbol{W})$ という仮定から $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{W}$。よって $\boldsymbol{P}$ は対称行列ではない。

次に $\boldsymbol{P}$ によって射影される空間を考える。いま n 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ があるとき、$\boldsymbol{P}$ による写像は、$\boldsymbol{b} \equiv (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y}$ とおくと、

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$$

で表されるから、$\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ 上にある。加えて、もし $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ であれば、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ と表すことができるから、

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y}$$

となって $\boldsymbol{P}$ の写像はすべて $\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ 上にある。

さて、$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ によって射影される空間を考えよう。n 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ があるとき、$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ による写像は $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{u}$ となるが、

$$\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{W}' - \boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}')\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{W}' - \boldsymbol{W}')\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

が成立するので、$\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ 上にある。また $\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ となる n 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ があるとき、$\boldsymbol{W}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成立するから、$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$ による写像は

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

となって、$\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ 上にある。題意より $\mathcal{S}(\boldsymbol{X}) \neq \mathcal{S}(\boldsymbol{W})$ であるから、$\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ と $\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ は直交しない。

Q. 2.13

関係式を行列を使って表現すると、

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{XA}$$

よって

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

次に、上の関係式を $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ について解くと

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 8 & -2 \\ 10 & 5 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{ZA}^{-1}$$

となり、$\boldsymbol{A}$ は逆行列をもつことが示される。

次に 2 つの回帰式が同じ予測値と残差をもたらすことを示すために、$\boldsymbol{P_Z}$ と $\boldsymbol{P_X}$ について考える。正方行列の積の逆行列に関し、

$$(\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

が成立することを用いると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P_Z} &= \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z} \\ &= \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{XA})^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}' \\ &= \boldsymbol{XAA}^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}' \\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{P_X} \end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{P_Z} = \boldsymbol{P_X}$、$\boldsymbol{M_Z} = \boldsymbol{M_X}$ が成立するので 2 つの回帰式は同じ予測値と残差をもたらす。

上記のことより

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{ZA}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

が成立するので、

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 & -2 \\ 10 & 5 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

ゆえに $\hat{\beta}_1 = \hat{\alpha}_1 + 2\hat{\alpha}_3$、$\hat{\alpha}_1 = 17\hat{\beta}_1 + 8\hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3$。