エコノメトリックスII 宿題解答例(4)

2008年11月19日

Q. 2.17

FWL定理を用いると、問題の回帰式の両辺に $\boldsymbol{M_1}$ を掛けた式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M_1 y} &= \boldsymbol{M_1 1} + \boldsymbol{M_1 X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M_1 u} \\ &= \boldsymbol{M_1 X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M_1 u}\end{aligned}$$

における β_2 の最小二乗推定量は、元の回帰式の β_2 の最小二乗推定量と一致する。したがって、

$$\hat{\beta}_2 = (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}$$

書き直すと、

$$\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2\hat{\beta}_2 = \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y} \tag{1}$$

となる。

次に、元の回帰式の回帰残差について考えてみよう。説明変数ベクトルと残差ベクトルは直行するので、以下の式が成立する。

$$\boldsymbol{1}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{1}\hat{\beta}_1 - \boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2) = 0$$

この式は変形すると、以下のように書き換えることができる。

$$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{1}\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \tag{2}$$

$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{1} = n$ であるから、(1) 式と (2) 式をつなげて以下の等式を作ることができる。

$$\begin{aligned}n\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 &= \boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2\hat{\beta}_2 &= \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}\end{aligned}$$

これは分割行列を使って以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} n & \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2 \\ 0 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}\end{bmatrix}$$

これにより、設問の形で $\hat{\beta}_1$ と $\hat{\beta}_2$ を記述できることは明らか。

Q. 2.26

(2.56) の回帰は

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \alpha \boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{u} \tag{2.56}$$

であり、$\boldsymbol{e}_t$ は t 番目の要素が 1、それ以外の要素が 0 のベクトルである。もし (2.56) の OLS 残差 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の t 番目の要素が 0 でなければ、0 にするように α を変えることで残差二乗和を減らすことができる。なぜなら α の値は t 番目の要素にのみ作用するので、他の残差には影響しないからである。よって、もし $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ が (2.56) の回帰の最小二乗推定量ならば、$\tilde{\alpha} = \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\tilde{\beta}$ である。

上から、t 番目の観測値を除いた場合の t 番目の残差における変化は $\tilde{\alpha} - \hat{\boldsymbol{u}}_t$ だということがわかる。(2.62)、すなわち FWL 定理により、$\tilde{\alpha}$ は $\hat{\boldsymbol{u}}_t/(1-h_t)$ と等しい。(ここで、h_t は $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}$ の (t,t) 要素である。)

よって

$$\tilde{\alpha} - \hat{\boldsymbol{u}}_t = \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_t}{(1-h_t)} - \hat{\boldsymbol{u}}_t = \hat{\boldsymbol{u}}_t \frac{h_t}{1-h_t}$$

となり、問いの証明となる。