エコノメトリックスII 宿題解答例 (5)

2008 年 11 月 26 日

Q. 3.2

(3.16) 式の大数の法則を中心化した変数 (centered variables)$x_t - \mu_t$ について表すと、

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \mu_t) = 0$$

となる。ところで、μ_t は非確率変数であるから、上式は

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \mu_t = 0$$

となるので、求めようとする式はここから自明。

Q. 3.9

z_t の期待値を μ_t とする。z_t $(t = 1, \ldots, n)$ の和の期待値は、それぞれの期待値の和なので、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\sum_{t=1}^{n} z_t) &= \mathrm{E}((\sum_{t=1}^{n} z_t - \sum_{t=1}^{n} \mu_t)^2) \\
&= \mathrm{E}((\sum_{t=1}^{n}(z_t - \mu_t))^2) \\
&= \mathrm{E}(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(z_t - \mu_t)(z_s - \mu_s)) \qquad (1) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}((z_t - \mu_t)(z_s - \mu_s))
\end{aligned}$$

$s \neq t$ のとき z_t と z_s の共分散は 0 なので、

$$\mathrm{E}((z_t - \mu_t)(\boldsymbol{z}_s - \mu_s)) = \mathrm{Cov}(z_t, z_s) = 0$$

従って、(1) の最後の行で、0 でないのは $s = t$ の項だけとなる。つまり

$$\mathrm{Var}(\sum_{t=1}^{n} z_t) = \sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}((z_t - \mu_t)^2) = \sum_{t=1}^{n}\mathrm{Var}(z_t) \qquad (2)$$

これにより問いを証明できる。