エコノメトリックスII 宿題解答例(6&7)

2008年12月26日

宿題第6回

Q.3.17

(3.70)式で表されるどの推定量もガウス=マルコフ定理が扱う推定量のクラス(線形不偏推定量)に属することは明らかであり、この推定量を「ガウス=マルコフ推定量」と呼ぶことにしよう。(3.70)の推定量が $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ で表されることを示すには、$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'$ と置けば良く、条件である $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ も満たされる。

次に、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ を満たす $\boldsymbol{A}$ のもとで、全ての $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{W}$ を求めると、$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}'$ がその答えとなる。($\boldsymbol{A}$ が $k \times n$ であり $\boldsymbol{W}$ が $n \times k$ であることに注意。) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ であるから、

$$(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

となる。従って、ガウス=マルコフ推定量のクラスは(3.70)式で定義されたMM推定量と同一となる。

宿題第7回

Q. 3.19

$\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}}$ はQ.3.15で与えられているから、

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

上式に左から $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

この式に左から $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}$ を掛けると

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}$$

が得られる。QED