エコノメトリックスII 宿題解答例 (8&9)

2009 年 1 月 21 日

宿題第 8 回

Q. 4.10

(4.35) 式より

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}$$

が成立する。これを変形すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}-\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}\\ &= \boldsymbol{X}_1\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1+(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

となる。(4.36) 式より $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2}$ が成り立つ。ところで、FWL 定理より、非制約の回帰式 (4.28) 式における $\boldsymbol{\beta}_2$ の OLSE は、

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2+\mathrm{error}$$

の OLSE と一致するので、$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2=(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}$$

と表すことができる。この関係を用いると (4.38) 式

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}_1\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1+\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

が得られる。設問中のヒントより、この等式を変形すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) &= \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2-\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2\\ &= \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2\\ &= \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2\end{aligned}$$

が得られ、さらにこの等式に $(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'$ を左からかけることで、以下の式が得られる。

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1=(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ を右辺へ移動すれば、設問の式が得られる。

Q. 6.2

y_t から標本平均 $\bar{y}$ を引くことや、$1/t$ からその標本平均 $s(n)/n$ を引くことは、それぞれ定数項に回帰して残差をとることに等しい。よってFWL 理論により OLS 推定量 $\hat{\beta}_2$ は $y_t - \bar{y}$ を $1/t - s(n)/n$ に回帰したときの推定量と同一である。この推定量は以下の式で表される。

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(1/t - s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t - s(n)/n)^2} \tag{a}$$

DGP は (3.20) 式であり、$\beta_2 = \beta_2^0$ と仮定されているので、

$$y_t - \bar{y} = \beta_2^0(1/t - s(n)/n) + u_t - \bar{u} \tag{b}$$

となる。ここで $\bar{u}$ は u_t の平均を示す。(a) 式を (b) 式に代入すると以下の様に書き換えられる。

$$\hat{\beta}_2 - \beta_2^0 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(u_t - \bar{u})(1/t - s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t - s(n)/n)^2} \tag{c}$$

(c) 式より $\beta_2 - \beta_2^0$ の平均値が 0 であること得られる。なぜなら、$1/t - s(n)/n$ は非確率変数なので、右辺の分子の期待値は、$u_t - \bar{u}$ の期待値と同じく 0 である。分母もまた非確率変数なので、u_t に関する仮定より、$\beta_2 - \beta_2^0$ は平均 0 の正規分布となる。

次に (c) 式の右辺の漸近分散を求めることにしよう。平均は 0 であるから、

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{t=1}^{n}(u_t - \bar{u})(1/t - s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t - s(n)/n)^2}\right)^2 \tag{d}$$

(d) 式の右辺の分子は n 項の和の二乗である。$t \neq s$ のときには $\mathrm{E}(u_t u_s) = 0$ なので、$\mathrm{plim}(\bar{u}) = 0$ である。さらに、$\lim s(n)/n = 0$ である。よって、この分子の期待値は漸近的に

$$\mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{n} {u_t}^2 (1/t)^2\right) = \frac{1}{6}\pi^2\sigma^2 \tag{e}$$

と等しい。また、$\lim s(n)/n = 0$ かつ $\lim s^2(n)/n = 0$ より、(c) 式の右辺の分母は漸近的に

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}(1/t)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\pi^2\right)^2 \tag{f}$$

と等しい。ゆえに (e) の右辺を (f) 式の右辺で割ると、以下のように漸近分散が得られる。

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) \overset{a}{=} \frac{6\sigma^2}{\pi^2}$$

Q. 6.6

残差 2 乗和 (SSR) は、パラメータ β_1, β_2 の関数であり、

$$\mathrm{SSR}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2})^2$$

と表すことができる。$\mathrm{SSR}(\beta_1, \beta_2)$ の最小化のための一階の条件は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{SSR}(\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1} &= -2\sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2}) z_t^{\beta_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathrm{SSR}(\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_2} &= -2\sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2}) \beta_1 z_t^{\beta_2} \log z_t = 0\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{da^x}{dx} &= \frac{d\exp(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \exp(z)\log a = a^x \log a \\ &\text{where } z = \log(a^x)\end{aligned}$$

次にこの一階の条件の行列表現を考えよう。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}' \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}) &= \begin{pmatrix} \beta_1 z_1^{\beta_2} & \cdots & \beta_1 z_n^{\beta_2} \end{pmatrix}' \\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}) &= \begin{pmatrix} z_1^{\beta_2} & \beta_1 z_1^{\beta_2}\log z_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_n^{\beta_2} & \beta_1 z_n^{\beta_2}\log z_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおくと、先の一階の条件は

$$-2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})) = \boldsymbol{0}$$

と表すことができ、定数の -2 を除けばモーメント条件に一致する。

宿題第9回

Q. 6.8

DGP(Data Generating Process) より

$$\hat{u}_t \equiv y_t - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

と書ける。次に $x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ を真値 $\boldsymbol{\beta}_0$ の周りで2次の項まで Taylor 展開すると、

$$x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = x_t(\boldsymbol{\beta}_0) + \boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) + \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'\bar{\boldsymbol{H}}_t(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)$$

となるから、これを最初の式に代入すると (6.10) を得る。

(6.10) を $\boldsymbol{b}$ を使って書き直すと、

$$\hat{u}_t = u_t - n^{-1/2}\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}n^{-1}\boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{b}$$

となる。これより $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 = \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ は

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)'\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b} + \frac{1}{4n^2}\sum_{t=1}^{n}(\boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{b})^2 \\ &\quad -2n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}u_t\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'\left(n^{-1}\sum_{t=1}^{n}u_t\bar{\boldsymbol{H}}_t\right)\boldsymbol{b} \\ &\quad +n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'\bar{\boldsymbol{H}}_t\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

と表すことが出来る。求めたいのは、$n \to \infty$ のときに右辺がどのようになるかである。まず右辺 2 項目は

$$\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)'\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0) = \boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0$$

であり、

$$\boldsymbol{b} \simeq \left(n^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0\right)^{-1} n^{-1/2}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u}$$

であることを用いると、

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}$$

となる。次に 3 項目は $O(1/n)$ であるので 0 に収束する。4 項目は

$$\begin{aligned}-2n^{-1/2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{\beta} &\simeq -2n^{-1/2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0(n^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0)^{-1}n^{-1/2}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} \\ &= -2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{u} \\ &= -2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

となる。5 項目は

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}u_t\bar{\boldsymbol{H}}_t \to \mathrm{E}(u_t\bar{\boldsymbol{H}}_t) = \boldsymbol{O}$$

となるため、また 6 項目は $O(1/\sqrt{n})$ であるため、それぞれ 0 に収束する。
　これらの結果を代入すると、

$$\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}$$

よって、

$$|\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{u}| \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty$$

が示せる。