

エコノメトリックス II 講義ノート 第 5 回

2005 年 11 月 2 日
(2008 年 11 月 12 日訂正)

FWL Theorem

text p.66-67 の解説

$P_X X_1 = X_1$ の証明

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $X'X$ を分割行列を使って表すと、

$$X'X = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}$$

となる。いま $(X'X)^{-1}$ を

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} A & C' \\ C & B \end{pmatrix}$$

で表すと、

$$\begin{aligned} P_X &\equiv X(X'X)^{-1}X' \\ &= \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C' \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \\ &= X_1AX_1' + X_2CX_1' + X_1C'X_2' + X_2BX_2' \end{aligned}$$

となる。

次に、 $(X'X)^{-1}(X'X) = I$ であるから、

$$\begin{aligned} (X'X)^{-1}(X'X) &= \begin{pmatrix} A & C' \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(X_1'X_1) + C'(X_2'X_1) & A(X_1'X_2) + C'(X_2'X_2) \\ C(X_1'X_1) + B(X_2'X_1) & C(X_1'X_2) + B(X_2'X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} P_X X_1 &= (X_1AX_1' + X_2CX_1' + X_1C'X_2' + X_2BX_2')X_1 \\ &= X_1(A(X_1'X_1) + C'(X_2'X_1)) + X_2(C(X_1'X_1) + B(X_2'X_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{X}_1 \mathbf{I} + \mathbf{X}_2 \mathbf{O} \\
 &= \mathbf{X}_1 \quad \diamond
 \end{aligned}$$

$P_X P_1 = P_1$ の証明

$$\begin{aligned}
 P_X P_1 &= P_X (\mathbf{X}_1 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1) \\
 &= (P_X \mathbf{X}_1) (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1 \\
 &= \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1 = P_1 \quad \diamond
 \end{aligned}$$