7/3/'09

エコノメトリックスⅠ '09 第11回授業 補足資料

$\chi^2(k)$ の特性関数の導出

Gamma関数の定義（教科書 p234）より

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \int_0^\infty y^{\frac{k}{2}-1} \exp(-y)\, dy$$

ここで $y = \dfrac{x(1-2i\theta)}{2}$ とおくと　$\left(dy = \dfrac{(1-2i\theta)}{2} dx \right.$ であるのがポイント $\left.\right)$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{x(1-2i\theta)}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x(1-2i\theta)}{2}\right) \times \left(\frac{1-2i\theta}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1-2i\theta}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x(1-2i\theta)}{2}\right) dx$$

よって

$$\int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x(1-2i\theta)}{2}\right) dx = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} (1-2i\theta)^{-\frac{k}{2}}$$

ゆえに

$$E(e^{i\theta x}) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x(1-2i\theta)}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} (1-2i\theta)^{-\frac{k}{2}}$$

$$= (1-2i\theta)^{-\frac{k}{2}} \quad //$$