2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII 第1回宿題解答例

2009年10月23日

問1

(1) 線形回帰モデルが $y_t = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t,\ (t = 1, \ldots, n)$ で与えられているから、

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{\beta} + u_1 \\ \boldsymbol{x}_2'\boldsymbol{\beta} + u_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n'\boldsymbol{\beta} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \boldsymbol{x}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$$

となる。

(2) $\boldsymbol{\beta}$ の最小2乗推定量 (OLSE)$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}}\, \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$$

で与えられるから、$S \equiv \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$ とすると、最小化のための1階の条件より

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ &= -\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} = -2\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) = \boldsymbol{0} \qquad (1) \end{aligned}$$

いま $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ が full rank であれば逆行列 $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ が存在し、(1) 式を満たす $\boldsymbol{\beta}$ は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \qquad (2)$$

となる。

【別答】

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \boldsymbol{x}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t \boldsymbol{x}_t',$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t y_t$$

であることに注目すると、授業で示した

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t \boldsymbol{x}_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t y_t$$

より (2) 式が得られる。

問 2

(1) 問 1 の結果より

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} &= \left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t \boldsymbol{x}_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t y_t \\
&= \left[\sum_{t=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & z_t \\ z_t & z_t^2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t y_t \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} n & \sum z_t \\ \sum z_t & \sum z_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum z_t y_t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum z_t^2 - (\sum z_t)^2} \begin{pmatrix} \sum z_t^2 & -\sum z_t \\ -\sum z_t & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum z_t y_t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum z_t^2 - (\sum z_t)^2} \begin{pmatrix} (\sum z_t^2)(\sum y_t) - (\sum z_t)(\sum z_t y_t) \\ -(\sum z_t)(\sum y_t) + n(\sum z_t y_t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得られる。

(2) (1) でもとめた結果より、

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_2 &= \frac{n \sum_{t=1}^{n} z_t y_t - \sum_{t=1}^{n} z_t \sum_{t=1}^{n} y_t}{n \sum_{t=1}^{n} z_t^2 - (\sum_{t=1}^{n} z_t)^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{n} z_t y_t - n\bar{z}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{n} z_t^2 - n\bar{z}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n} (z_t - \bar{z})^2}
\end{aligned}$$

と変形できる。また、

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{(\sum_{t=1}^{n} z_t^2)(\sum_{t=1}^{n} y_t) - (\sum_{t=1}^{n} z_t)(\sum_{t=1}^{n} z_t y_t)}{n \sum_{t=1}^{n} z_t^2 - (\sum_{t=1}^{n} z_t)^2} \\
&= \frac{(\sum_{t=1}^{n} z_t^2)\bar{y} - \bar{z}(\sum_{t=1}^{n} z_t y_t) + \bar{z}(n\bar{z}\bar{y}) - \bar{y}(n\bar{z}^2)}{\sum_{t=1}^{n} z_t^2 - n\bar{z}^2} \\
&= \bar{y} - \bar{z}\hat{\beta}_2
\end{aligned}$$

と変形できる。