

## 2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII 第10回宿題解答例

2010年1月22日

### Q. 6.10

設問のモデルをまとめると、

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

となるが、 $u_{t-1}$  を  $y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1} \boldsymbol{\beta}$  に、 $u_{t-2}$  を  $y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2} \boldsymbol{\beta}$  に置き換える。最初の2つの観測値を所与とすれば、元のモデルは次の非線形回帰モデルに書き換えることができる。

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \rho_1 (y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1} \boldsymbol{\beta}) + \rho_2 (y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2} \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t \quad (Q6.10-1)$$

次に、OLS推定量  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  を得るために、 $y_t$  を  $\mathbf{X}_t$  上に回帰させる必要がある。またGNRの独立変数を得るために、以下のように(Q6.10-1)式の回帰式をパラメータについて微分しなければならない。

$$\begin{aligned} \partial x_t(\boldsymbol{\beta}) / \partial \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{X}_t - \rho_1 \mathbf{X}_{t-1} - \rho_2 \mathbf{X}_{t-2} \\ \partial x_t(\boldsymbol{\beta}) / \partial \rho_1 &= y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1} \boldsymbol{\beta} \\ \partial x_t(\boldsymbol{\beta}) / \partial \rho_2 &= y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2} \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

GNRの従属変数と独立変数は(帰無仮説の)制約付推定量  $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, 0, 0)$  で評価される。このGNRの被説明変数(従属変数)は  $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{X}_t \hat{\boldsymbol{\beta}}$  になる。また  $\boldsymbol{\beta}$  に対応する独立変数のベクトルは  $\mathbf{X}_t$  であり、 $\rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) に対応する独立変数は  $\hat{u}_{t-i}$  である。よってテストの回帰は以下の通り。

$$\hat{u}_t = \mathbf{X}_t \mathbf{b} + r_1 \hat{u}_{t-1} + r_2 \hat{u}_{t-2} + \text{residual}. \quad (Q6.10-2)$$

この回帰式における  $r_1 = r_2 = 0$  の検定のためのF統計量は、元のテスト統計量と等しくなる。これは(Q6.10-2)式の回帰式の制約なしモデルのSSRと  $y_t$  を  $\mathbf{X}_t$  のみに回帰した制約付モデルのSSRを使って計算できる。これらの2つの回帰モデルの推定は同じサンプル期間で行われなければならない。よって、最初の2つの観測値を除くか、観測できないラグ付残差を0で置き換えるか、のどちらかの対応をする必要がある。