2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第2回宿題解答例

2009年10月30日

Q. 2.4

ノルムおよび内積は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\| \boldsymbol{x} \| &= (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{1/2} = \sqrt{5.18} = 2.276 \\ \| \boldsymbol{y} \| &= (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y})^{1/2} = \sqrt{39.85} = 6.313 \\ < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = 14.2\end{aligned}$$

内積の定義より $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos\theta$ であるから、

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{14.2}{2.276 \times 6.313} = 0.9883$$

よって、

$$\theta = \cos^{-1} 0.9883 = 0.0487\pi = 0.1529\text{radians}$$

Q. 2.6

設問中の hint に従い、$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_2$ となる $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2$ が存在すると仮定しよう。このとき、以下の式が導ける。

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) \equiv \boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

$b_1 \neq b_2$ なので、$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$。

しかし $\boldsymbol{X}$ の k 個の列は線形独立しているので、$\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のときのみ。これは hint にしたがった仮定に反する。

ゆえに $\boldsymbol{X}$ の k 個の列が線形独立しているならば、$\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ は、一意の $k \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{b}$ により、$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$ と表すことができる。

Q. 2.8

(2.14) 式を $\boldsymbol{x}_2$ について解くと、

$$\boldsymbol{x}_2 = 4(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3)$$

これを $\boldsymbol{z}$ に代入すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2 \\ &= (b_1 + 4b_2)\boldsymbol{x}_1 - 4b_2\boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

となるので、$\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3)$。

同様にして (2.14) 式を $\boldsymbol{x}_1$ について解くと、

$$\boldsymbol{x}_1 = (1/4)\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$$

これを $\boldsymbol{z}$ に代入すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= b_1(1/4\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) + b_1\boldsymbol{x}_2 \\ &= (1/4b_1 + b_2)\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

となって、$\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$。