2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第3回宿題解答例

2009年11月6日

Q. 2.10

まず $\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'$ がべき等行列 (idempotent matrix) であることを示す。

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{P}$$

しかし、

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

であるので、$\mathcal{S}(\boldsymbol{X}) \neq \mathcal{S}(\boldsymbol{W})$ という仮定から $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{W}$。よって $\boldsymbol{P}$ は対称行列ではない。

次に $\boldsymbol{P}$ によって射影される空間を考える。いま n 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ があるとき、$\boldsymbol{P}$ による写像は、$\boldsymbol{b} \equiv (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y}$ とおくと、

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$$

で表されるから、$\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ 上にある。加えて、もし $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ であれば、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ と表すことができるから、

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y}$$

となって $\boldsymbol{P}$ の写像はすべて $\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ 上にある。

さて、$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ によって射影される空間を考えよう。n 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ があるとき、$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ による写像は $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{u}$ となるが、

$$\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{W}' - \boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}')\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{W}' - \boldsymbol{W}')\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

が成立するので、$\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ 上にある。また $\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ となる n 次元の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ があるとき、$\boldsymbol{W}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成立するから、$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ による写像は

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

となって、$\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ 上にある。題意より $\mathcal{S}(\boldsymbol{X}) \neq \mathcal{S}(\boldsymbol{W})$ であるから、$\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ と $\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{W})$ は直交しない。

Q. 2.12

$\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ となる任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ は、$\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}$ であるベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いると、

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$$

と表現することができる。ところで、$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$ であるから、

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$$

となるが、$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{O}$ であることを用いると

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

よって $\boldsymbol{z}$ は、$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}$ によって消滅する (annihilate)。次に、$\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{X})$ となる任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ は、$\boldsymbol{w}'\boldsymbol{z} = 0$ を満たしているから、$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$ であることを使うと、

$$\boldsymbol{w}'\boldsymbol{z} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} = 0$$

と表すことができる。よって

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{O}$$

ゆえに $\boldsymbol{w}$ は、$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}$ によって消滅する (annihilate)。