2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第4回宿題解答例

2009年11月13日

Q. 2.17

FWL定理を用いると、問題の回帰式の両辺に $\boldsymbol{M_1}$ を掛けた式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M_1 y} &= \boldsymbol{M_1 1} + \boldsymbol{M_1 X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M_1 u} \\ &= \boldsymbol{M_1 X}_2\beta_2 + \boldsymbol{M_1 u}\end{aligned}$$

における β_2 の最小二乗推定量は、元の回帰式の β_2 の最小二乗推定量と一致する。したがって、

$$\hat{\beta}_2 = (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}$$

書き直すと、

$$\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2\hat{\beta}_2 = \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y} \tag{1}$$

となる。

次に、元の回帰式の回帰残差について考えてみよう。説明変数ベクトルと残差ベクトルは直行するので、以下の式が成立する。

$$\boldsymbol{1}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{1}\hat{\beta}_1 - \boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2) = 0$$

この式は変形すると、以下のように書き換えることができる。

$$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{1}\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \tag{2}$$

$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{1} = n$ であるから、(1) 式と (2) 式をつなげて以下の等式を作ることができる。

$$\begin{aligned}n\hat{\beta}_1 + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2\hat{\beta}_2 &= \boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2\hat{\beta}_2 &= \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}\end{aligned}$$

これは分割行列を使って以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} n & \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}_2 \\ 0 & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 X}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{1}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{M_1 y}\end{bmatrix}$$

これにより、設問の形で $\hat{\beta}_1$ と $\hat{\beta}_2$ を記述できることは明らか。

Q. 2.20

(注意：授業上の表記と統一するために、以下では $\boldsymbol{\iota}$ を $\mathbf{1}$ で表すことにする。)
設問より行列 $\boldsymbol{X}$ の第 1 列が $\mathbf{1}$ であるから、第 j 列 $(j = 2, 3)$ を

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_j = (x_{1j}, \cdots, x_{tj}, \cdots, x_{nj})'$$

で表すと、

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \tilde{\boldsymbol{x}}_2 & \tilde{\boldsymbol{x}}_3 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\mathbf{1} & \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\tilde{\boldsymbol{x}}_2 & \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\tilde{\boldsymbol{x}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\tilde{\boldsymbol{x}}_2 & \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\tilde{\boldsymbol{x}}_3 \end{pmatrix},$$

ここで、$\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{X}$ の (t, j) 要素 $(j = 2, 3)$ は、

$$x_{tj} - \bar{x}_j = x_{tj} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{kj}$$

となる。

また $\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{X}$ についてみると、

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1}\bar{x}_2 & \mathbf{1}\bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

のように、j 列の n 個の要素がすべて元の $\boldsymbol{X}$ の j 列の（算術）平均になっている行列であることがわかる。

次に、(2.35) 式の性質を用いると、$\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} \\ &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} \end{aligned}$$

この結果は、$\mathcal{S}^{\perp}(\boldsymbol{X})$ の上に射影したどんなベクトルでもその平均（重心）が 0 になっている、という点で重要である。したがって $\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}$ を乗じても何の影響ももたらさないのである。

さらに (2.35) 式より

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{O}$$

が得られる。これにより、どの $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{z}$ も平均（重心）は 0 にならなければならないので、それを $\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}$ で乗ずることは単にゼロベクトルに射影ずることを意味する。