2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII 第6回宿題解答例

2009年11月27日

Q. 3.2

(3.16) 式の大数の法則を中心化した変数 (centered variables)$x_t - \mu_t$ について表すと、

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \mu_t) = 0$$

となる。ところで、μ_t は非確率変数であるから、上式は

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mu_t = 0$$

となるので、求めようとする式はここから自明。

Q. 3.8

$\boldsymbol{A}$ は $k \times k$ の正値定符号行列 (positive definite matrix)。いま $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{A}$ となる $k \times k$ の対称行列とする。また $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる非ゼロベクトルとする。このとき、正値定符号行列の定義より

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} > 0$$

これより、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} \\
&= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-2}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} \\
&= \boldsymbol{z}'(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

したがって、$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ が正値定符号であれば $(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})$ も正値定符号。逆も同様に成立。　QED

次に $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ が正値定符号行列であれば、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{z} \\
&= \boldsymbol{z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1})\boldsymbol{z} > 0
\end{aligned}$$

ゆえに、$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}$ も正値定符号行列。このとき前段の性質から $\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I}$ も正値定符号行列。

$$\boldsymbol{z}'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{x}>0$$

よって $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ は正値定符号。逆も同様に証明。 QED

Q. 3.10

(3.33) 式より、$\mathrm{Var}(\hat{\gamma})=\boldsymbol{w}'\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{w}$ である。(3.24) 式から、この二次形式は

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}w_iw_j\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j) \qquad (Q3.10-1)$$

と等しくなる。

しかし $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_i)=\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)$ かつ $w_iw_i=w_i^2$ なので、この式は

$$\sum_{i=1}^{k}w_i^2\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\neq i}w_iw_j\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j) \qquad (Q3.10-2)$$

と等しい。

さらに、共分散行列が対称であるから、$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j)=\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_i)$ である。これにより、(Q3.10-2) 式の第 2 項は

$$2\sum_{i=2}^{k}\sum_{j<i}w_iw_j\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j) \qquad (Q3.10-3)$$

と表すことができる。

$\sum_{i=2}^{k}\sum_{j<i}$ を明示的に表現すると、$\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{i-1}$ になるので、(Q3.10-3) を書き換えると、(3.68) 式が得られる。