# 2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII 第7回宿題解答例

2009年12月4日

## Q. 3.12

式(3.42)の第2列目は

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &= u_t - \textstyle\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'_s u_s \\ &= u_t - \textstyle\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{x}'_t(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_s u_s\end{aligned} \qquad (Q3.12-1)$$

である。ここで $\boldsymbol{e}_t$ を $t$ 番目の要素だけ1であとは全て0である $n$ 次元の縦ベクトルとすると、$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{x}'_t = \boldsymbol{e}'_t\boldsymbol{X}$ である。

(Q3.12-1)式は

$$\hat{u}_t = (1 - \boldsymbol{x}'_t(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_t)u_t - \sum_{s\neq t} \boldsymbol{x}'_t(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_s u_s \qquad (Q3.12-2)$$

の様に、共分散が0である平均0の確率変数の和として書き換えることができる。

(Q3.12-2)式は、射影行列 $\boldsymbol{P_X}$ の全ての要素を用いて表現できる。表記の都合上、$\boldsymbol{P_X}$ 行列の $(t,s)$ 要素を $P_{ts}$ で表すことにしよう。すると

$$\hat{u}_t = (1 - P_{tt})u_t - \sum_{s\neq t} P_{ts}u_s$$

となる。

$\hat{u}_t$ の分散は、Q3.9の結果より上式の右辺の項の分散の和に等しいので、

$$\mathrm{Var}(\hat{u}_t|\boldsymbol{X}) = \sigma_0^2((1-P_{tt})^2 + \sum_{s\neq t} P_{ts}^2) = \sigma_0^2(1 - 2P_{tt} + \sum_{s=1}^{n} P_{ts}^2) \qquad (Q3.12-3)$$

となる。

$\boldsymbol{P_X}$ は直交射影行列であるから、対称かつべき等である。よって

$$\sum_{s=1}^{n} P_{ts}^2 = \sum_{s=1}^{n} P_{ts}P_{st} = (\boldsymbol{P}^2_{\boldsymbol{X}})_{tt} = P_{tt}$$

である。

この性質より(Q3.12-3)は

$$\mathrm{Var}(\hat{u}_t|\boldsymbol{X}) = \sigma_0^2(1 - 2P_{tt} + P_{tt}) = \sigma_0^2(1 - P_{tt}) = \sigma_0^2(1 - h_t) \qquad (Q3.12-4)$$

と簡単に表すことができ、問いの証明となる。

## Q. 3.19

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は Q.3.15 で与えられているから、

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

上式に左から $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

この式に左から $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}$ を掛けると

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}$$

が得られる。QED