2009年度 エコノメトリックスII&上級エコノメトリックスII
第9回宿題解答例

2010年1月15日

Q. 6.2

y_t から標本平均 $\bar{y}$ を引くことや、$1/t$ からその標本平均 $s(n)/n$ を引くことは、それぞれ定数項に回帰して残差をとることに等しい。よってFWL理論によりOLS推定量 $\hat{\beta}_2$ は $y_t-\bar{y}$ を $1/t-s(n)/n$ に回帰したときの推定量と同一である。この推定量は以下の式で表される。

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})(1/t-s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t-s(n)/n)^2} \tag{a}$$

DGPは (3.20) 式であり、$\beta_2 = \beta_2^0$ と仮定されているので、

$$y_t - \bar{y} = \beta_2^0(1/t - s(n)/n) + u_t - \bar{u} \tag{b}$$

となる。ここで $\bar{u}$ は u_t の平均を示す。(a) 式を (b) 式に代入すると以下の様に書き換えられる。

$$\hat{\beta}_2 - \beta_2^0 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(u_t-\bar{u})(1/t-s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t-s(n)/n)^2} \tag{c}$$

(c) 式より $\beta_2 - \beta_2^0$ の平均値が0であること得られる。なぜなら、$1/t - s(n)/n$ は非確率変数なので、右辺の分子の期待値は、$u_t - \bar{u}$ の期待値と同じく0である。分母もまた非確率変数なので、u_t に関する仮定より、$\beta_2 - \beta_2^0$ は平均0の正規分布となる。

次に (c) 式の右辺の漸近分散を求めることにしよう。平均は0であるから、

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{t=1}^{n}(u_t-\bar{u})(1/t-s(n)/n)}{\sum_{t=1}^{n}(1/t-s(n)/n)^2}\right)^2 \tag{d}$$

(d) 式の右辺の分子は n 項の和の二乗である。$t \neq s$ のときには $\mathrm{E}(u_t u_s) = 0$ なので、$\mathrm{plim}(\bar{u}) = 0$ である。さらに、$\lim s(n)/n = 0$ である。よって、この分子の期待値は漸近的に

$$\mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{n} {u_t}^2 (1/t)^2\right) = \frac{1}{6}\pi^2\sigma^2 \tag{e}$$

と等しい。また、$\lim s(n)/n = 0$ かつ $\lim s^2(n)/n = 0$ より、(c) 式の右辺の分母は漸近的に

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}(1/t)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\pi^2\right)^2 \tag{f}$$

と等しい。ゆえに (e) の右辺を (f) 式の右辺で割ると、以下のように漸近分散が得られる。

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \beta_2^0) \overset{a}{=} \frac{6\sigma^2}{\pi^2}$$

Q. 6.6

残差 2 乗和 (SSR) は、パラメータ β_1, β_2 の関数であり、

$$\mathrm{SSR}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2})^2$$

と表すことができる。$\mathrm{SSR}(\beta_1, \beta_2)$ の最小化のための一階の条件は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{SSR}(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} &= -2\sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2}) z_t^{\beta_2} = 0 \\
\frac{\partial \mathrm{SSR}(\beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} &= -2\sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2}) \beta_1 z_t^{\beta_2} \log z_t = 0
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{da^x}{dx} &= \frac{d\exp(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \exp(z)\log a = a^x \log a \\
&\quad \text{where } z = \log(a^x)
\end{aligned}$$

次にこの一階の条件の行列表現を考えよう。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}' \\
\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}) &= \begin{pmatrix} \beta_1 z_1^{\beta_2} & \cdots & \beta_1 z_n^{\beta_2} \end{pmatrix}' \\
\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}) &= \begin{pmatrix} z_1^{\beta_2} & \beta_1 z_1^{\beta_2} \log z_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_n^{\beta_2} & \beta_1 z_n^{\beta_2} \log z_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とおくと、先の一階の条件は

$$-2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})) = \boldsymbol{0}$$

と表すことができ、定数の -2 を除けばモーメント条件に一致する。