第9回　5月26日の授業内容

- §3.　確率
  - §3.3　ベイズの定理
- §4.　確率変数と確率分布
  - §4.1　確率変数とは
  - §4.2　離散型確率変数
  - §4.3　連続型確率変数

§3.3　ベイズの定理

- **ベイズの定理**　Bayes' theorem
  - 条件付確率$P(A|B_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ と、条件となる事象の生起する確率$P(B_i)$から、条件を逆にした条件付確率$P(B_i|A)$が求まるという定理。
  - （簡単なケース）
    $P(B)>0$である事象Bがあるとする。いま任意の事象Aについて$P(A)>0$であるとき、条件付確率$P(B|A)$は

$$P(B \mid A)=\frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B)+P(A \mid B^c)P(B^c)}$$

で求められる。

§3.3　ベイズの定理(2)

- ベイズの定理（一般的なケース）
  - 事象$B_1, B_2, \ldots, B_n$が互いに排反であり、$i=1,\ldots,n$についで$P(B_i)>0$かつ、
    $P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)=1$であるものとする。
    このとき、$P(A)>0$である任意の事象Aについて

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

が成立する。

§3.3　ベイズの定理(3)

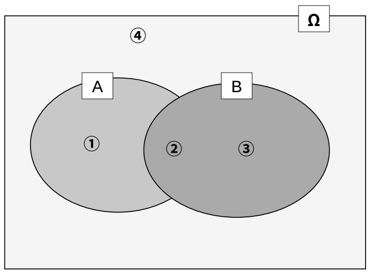
- 例：カルテル破り
  - 甲、乙2社がカルテルを結んでいる状態を考える。いま、「甲社がカルテルを破る」という事象をA、「乙社がカルテルを破る」という事象をBとする。
  - いま、自分が甲社であるとし、相手の出方によって、自分がカルテルを破る確率が決まっているものとしよう。このとき、ベイズの定理によって、相手がカルテルを破る確率が判れば、自分の戦略を所与とした時に相手がカルテルを破る確率が求められる。

§3.3　ベイズの定理(4)

- 数値例
  - 相手（乙）がカルテルを破るときに自分（甲）がカルテルを破る確率：$P(A|B)=1$
  - 相手（乙）がカルテルを守るときに自分（甲）がカルテルを破る確率：$P(A|B^c)=1/2$
  - 相手（乙）がカルテルを破る確率：$P(B)=1/3$
  - 相手（乙）がカルテルを守る確率：$P(B^c)=1-P(B)=2/3$
  - 自分（甲）がカルテルを破るときに、相手（乙）がカルテルを破る確率：$P(B|A)$

$$P(B \mid A)=\frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B)+P(A \mid B^c)P(B^c)}=\frac{1\times 1/3}{1\times 1/3+1/2\times 2/3}=\frac{1}{2}$$

ベン図による理解



A=①∪②

B=②∪③

$(A \cup B)^c$=④

①∪②∪③∪④=Ω

§4.1 確率変数とは

- 確率変数とは
  - 確率的にさまざまな値をとる変数
- 何故確率的なのか?
  - 「母集団－標本」関係の枠組で考えると理解しやすい。
  - 母集団から無作為抽出（ランダムサンプリング）されたのが、標本。→ランダムサンプリングが確率の素。
- 確率分布
  - 確率変数の分布のこと。
  - 母集団分布と相似形。

§4.2 離散型確率変数(1)

- 離散値をとる確率変数とその確率分布を考えることにしよう。
- （例）サイコロの目
  - $P(X=x)=P(x)=\begin{cases} 1/6 & x=1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$
- このようにとる値に対し、その出現確率を表す関数を確率関数 probability functionといい、全ての実数に対して定義する。

§4.2 離散型確率変数(2)

- 累積相対度数と同様に累積確率関数を定義する。
  - $F(x)\equiv P(X\leqq x)$
  - この累積確率関数（分布）のことを特に、分布関数 distribution function という
  - 分布関数の性質
    - D1 $0\leqq F(x)\leqq 1$
    - D2 $F(-\infty)=0,\ F(\infty)=1$
    - D3 $F(x)\leqq F(x')$ if $x\leqq x'$

§4.3 連続型確率変数(1)

- とる値が実数の確率変数
  - ⇒ ・無限の基本事象からなる標本空間
  - ・任意の基本事象の生起する確率はゼロ
  - （すなわちある特定の値をとる確率はゼロ）
- そこで、分布関数から定義する
  $F(x)\equiv P(X\leqq x)$

§4.3 連続型確率変数(2)

- 密度関数
  - 分布関数が連続で微分可能であるとき、

$$f(x)\equiv F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

を定義し、これを確率密度関数 probability density function とよぶ

  - 密度関数の定義から

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$