第10回　5月27日の授業内容

- §4．確率変数と確率分布
  - §4.4　確率分布とその代表値
    - 平均
    - 分散
    - 数学的期待値
    - 標準化
    - 確率変数の独立性
    - 条件付期待値
    - モーメント

§4.4　確率分布とその代表値(1)

- 確率分布の代表値
  - 確率変数 ･･･ 分布関数によって記述
  - 分布関数　⇔　確率関数 (離散)
  - 〃　⇔　密度関数 (連続)

　一意に対応

分布関数の形を代表値で要約することを考えよう。

(注意) この代表値は、数学的期待値という定数（母数）であることに注意!!

§4.4　確率分布とその代表値(2)

- 平均 mean
  - 離散型確率変数の場合

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(x_i)$$

  - 連続型確率変数の場合

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

§4.4　確率分布とその代表値(3)

- 分散 variance
  - 離散型確率変数の場合

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\{(X-\mathrm{E}(X))^2\}\\ &= (x_1-\mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_m-\mu)^2 p(x_m)\\ &= \sum_{i=1}^{m} (x_i-\mu)^2 p(x_i)\end{aligned}$$

§4.4　確率分布とその代表値(4)

- 分散 variance　(続)
  - 連続型確率変数の場合

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\{(X-\mathrm{E}(X))^2\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx\end{aligned}$$

  - (注意) 連続型確率変数では、分布の裾が厚いと分散を持たないこともある。

§4.4　確率分布とその代表値(5)

- 数学的期待値 mathematical expectation
  - 一般に確率変数Xの関数$g(X)$の期待値 (数学的期待値) をE($g(X)$)とかき、次のように定義する
  - 離散型確率変数の場合

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{m} g(x_i)\, p(x_i)$$

  - 連続型確率変数の場合

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

§4.4 確率分布とその代表値(6)

- 期待値の性質
  - (1) $X \geqq 0$であれば $E(X) \geqq 0$
  - (2) E(a)=a aは定数
  - (3) $E(aX+b)=aE(X)+b$ a,bは定数
  - (4) $E(aX+cY)=aE(X)+cE(Y)$ a,cは定数
  - (5) $|E(X)| \leqq E|X|$
  - (6) $Var(aX+b)=a^2Var(X)$
  - (7) $E(g(X)) \neq g(E(X))$

§4.4 確率分布とその代表値(7)

- 標準化
  - 平均μ、分散σ^2をもつ確率変数Xを以下のように変形することで、平均0、分散1の確率変数を作ること。

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \quad \text{where} \begin{cases} \mathrm{E}(Z)=0 \\ \mathrm{Var}(Z)=1 \end{cases}$$

§4.4 確率分布とその代表値(8)

- 確率変数の独立性
  - 事象の独立性と同様に、確率変数の独立性も定義できる。確率変数X, Yが独立であるとき、以下が成立する。
    - 離散型 $\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(x,y) = \mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)$
    - 連続型 $f(x,y) = g(x)h(y)$
  - 性質
    確率変数X, Yが独立であるとき、
    $E(XY)=E(X)E(Y)$ が成立する。

§4.4 確率分布とその代表値(9)

- 条件付期待値
  - 同時確率分布
    確率変数（X, Y）の分布を2次元で考えたもの。
    - 離散型： $P(X=x, Y=y) = P(X=x \cap Y=y)$
    - 連続型： $f(x,y)$
  - 条件付確率分布
    確率変数の片方を所与としたときの分布
    - 離散型： $P(X=x \mid Y=y) = P(X=x, Y=y) / P(Y=y)$
    - 連続型： $h(x|y)=f(x,y)/g(y)$

§4.4 確率分布とその代表値(10)

- 条件付期待値（続）
  - 条件付期待値＝条件付確率分布の重心
    - 離散型

$$\mathrm{E}(X \mid Y=y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(x_i \mid y)$$

    - 連続型

$$\mathrm{E}(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x \mid y)\, dx$$

§4.4 確率分布とその代表値(11)

- モーメント moment
  - $g(X)=X^r$としたとき、その数学的期待値$E(X^r)$をXのr次モーメントという。
  - また、$g(X)=(X-\mu)^r$（但し$\mu=E(X)$）の数学的期待値$E\{(X-\mu)^r\}$をXの平均回りのr次モーメントという。
    - 3次モーメント：歪度、4次モーメント：尖度
  - モーメントはXの確率分布の形についての有用な指標である。