第12回　6月3日の授業内容

- §4．確率変数と確率分布
  - §4.5　基本的な確率分布
    - §4.5.3　一様分布
    - §4.5.4　指数分布

§4.5.3　一様分布 uniform distribution

- 連続型確率変数のひとつ
- ストップウォッチの例のように、すべてのとりうる実数値が等可能性で出現
- 分布関数：

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b \\ 1 & x>b \end{cases}$$

§4.5.3　一様分布(2)

- 確率密度関数：

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{b-a}$$

- 平均：

$$\mathrm{E}(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{a+b}{2}$$

- 分散：

$$\mathrm{Var}(X)=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

§4.5.3　一様分布(3)

- 表記について
  - Xが[a,b]（または(a,b)）の一様分布に従うとき、（すなわち、Xの確率分布が[a,b]の一様分布であるとき）、
    X〜U(a,b)
    で表す。

§4.5.4　指数分布 exponential distribution

- 指数分布とは
  - 連続型確率変数の一つ
  - とる値の範囲は　[0, ∞]
  - 寿命の分布などに用いられることが多い

§4.5.4　指数分布(2)

- 確率密度関数
  - パラメータβ（>0）の関数
  - 平均はβ、分散はβ²

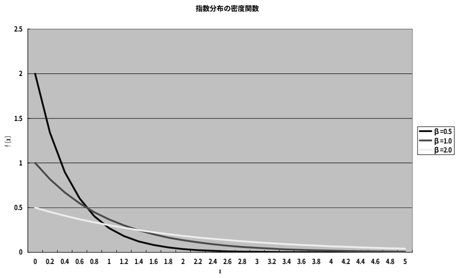
$$f(x)=\frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),\qquad \beta>0$$

$$E(x)=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty \frac{x}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)dx=\beta$$

$$Var(x)=\int_{-\infty}^\infty (x-\mu)^2 f(x)dx=\int_0^\infty \frac{(x-\beta)^2}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)dx=\beta^2$$

§4.5.4 指数分布(3)

- **密度関数の形状**
  0を最大として指数的に減衰するタイプの分布



§4.5.4 指数分布(4)

- **分布関数**

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)dt=1-\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

- **指数分布の性質**
  - X〜U(0,1)とすると、
    Y= - β log$X$
    は指数分布にしたがう。

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=1\times\left|-\frac{x}{\beta}\right|=\frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{y}{\beta}\right)$$

§4.5.4 指数分布(5)

- **指数分布の性質**(2)
  - 指数分布はポアソン過程のインターバル（待ち時間）の分布になっている。
  - 単位時間[0, s]におけるポアソン過程の平均をmsとすると、この単位時間においてポアソン事象がy回起きる確率は、
  - $$P(Y=y)=\frac{(ms)^y e^{-ms}}{y!}$$

  したがって、単位時間内にポアソン事象が1回も起きない確率は

  $$P(Y=0)=\frac{(ms)^0 e^{-ms}}{0!}=e^{-ms}=P(S>s)$$

  これより、 $P(S\le s)=1-e^{-ms}$ ← 指数分布の分布関数

§4.5.4 指数分布(6)

- **指数分布の性質**(3)
  - **記憶の欠如**
    P(X>n＋m|X>m)＝P(X>n)