2009年度 学部 統計 第12回講義補足資料

2009年6月3日

指数分布の（確率分布の）平均および分散の導出

確率変数 X が指数分布にしたがうとき、その（数学的）期待値は次のようにして求めることができる。

平均の導出

X の期待値 $\mathrm{E}(X)$ は、期待値の定義からスライドで示したように、

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \frac{x}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx$$

で求めることができる。$(x/\beta)\exp(-x/\beta)$ の原始関数は、

$$-(x+\beta)\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

で与えられるから、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx &= \left[-(x+\beta)\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\right]_0^\infty \\ &= \{-\infty \times \exp(-\infty)\} - \{-(0+\beta)\exp(0/\beta)\} \\ &= 0 - \{-\beta \times 1\} = \beta\end{aligned}$$

となる。ここで $-x$ と $\exp(-x)$ を比べると、$x \to \infty$ のとき、前者の（負の意味で）大きくなる速度は、後者の 0 に収束する速度より遅いから $-x \times \exp(-x)$ が 0 に収束することに注意して欲しい。（下表を見よ）

$-X$	$\exp(-X)$	$(-X) \times \exp(-X)$
-1	0.36788	-0.36788
-10	4.54×10^{-5}	-0.00045
-100	3.72×10^{-44}	-3.72×10^{-42}

分散の導出

X の (確率分布) の分散は、定義からスライドで示したように、

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}(X))^2\} = \int_0^\infty (x-\beta)^2 f(x)dx = \int_0^\infty \frac{(x-\beta)^2}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx$$

で求めることができる。この計算は少し面倒なので、授業中黒板で示した

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}(X))^2\} = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

の関係を使って求めることにしよう。

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx$$

であるが、$(x^2/\beta)\exp(-x/\beta)$ の原始関数が、

$$-(x^2 + 2\beta + 2\beta^2)\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

で与えられることを用いると、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx &= \left[-(x^2 + 2\beta + 2\beta^2)\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\right]_0^\infty \\
&= \{-\infty \times \exp(-\infty)\} - \{-(0 + 0 + 2\beta^2)\exp(0/\beta)\} \\
&= 0 - \{-2\beta^2 \times 1\} = 2\beta^2
\end{aligned}$$

となる。やはり $-x^2$ と $\exp(-x)$ を比べても、$x \to \infty$ のとき、前者の（負の意味で）大きくなる速度は、後者の 0 に収束する速度より遅いから $-x^2 \times \exp(-x)$ が 0 に収束することに注意して欲しい。

よって、$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 2\beta^2 - [\beta]^2 = \beta^2$ となる。