第13回　6月9日の授業内容

- §4．確率変数と確率分布
  - §4.5　基本的な確率分布（続）
    - §4.5.5　正規分布
      - 定義
      - 標準正規分布
      - 標準正規分布表
      - 正規分布の性質
      - 再生性
    - §4.5.6　正規分布の関連分布
      - カイ2乗分布
      - t-分布

§4.5.5　正規分布(1)

- 正規分布とは
  - 多くの自然現象のデータに見られる分布を数学的に表現したもの
  - 連続型確率変数の一つ
  - とる値の範囲は、[-∞,∞]

§4.5.5　正規分布(2)

- 確率密度関数
  - 平均μ、分散σ²の2つのパラメータの関数

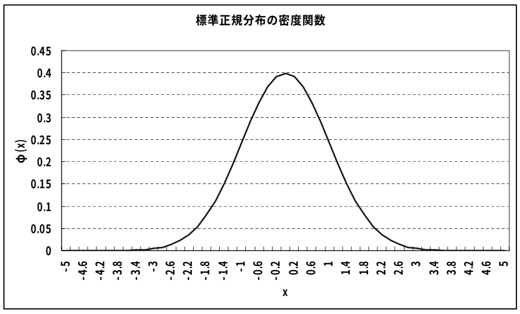
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\mu\equiv E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

$$\sigma^2\equiv Var(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx$$

§4.5.5　正規分布(3)

- 密度関数の形状
  平均μを中心とした左右対称の分布。ベル型。



§4.5.5　正規分布(4)

- 分布関数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

$$F(-\infty)=0,\ F(\mu)=1/2,\ F(\infty)=1$$

- 確率変数Xの確率分布が正規分布であるとき、すなわちXが正規分布にしたがうとき、
  X~N(μ,σ²)
  と表す。

§4.5.5　正規分布(5)

- 分布関数F(x)の性質
  - 確率変数Xが、平均μから、標準偏差σのa倍までの間の値をとる確率が決まっている。
    - P(μ<X≦μ+σ)=F(μ+σ)−F(μ)=0.341
    - P(μ+σ<X≦μ+2σ)=0.136
    - P(μ+2σ<X≦μ+3σ)=0.022
    - P(μ+3σ<X≦∞)=0.001
  - 積分は難しいので、平均0、分散1の正規分布（標準正規分布）の分布関数Φ(x)が作表されている。

§4.5.5 正規分布(6)

- **標準正規分布表**

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \text{ または}$$

$$1-\Phi(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \text{ を作表したもの。}$$

– 教科書p. 296 の表3を参照のこと

小数点第2桁

z	.00	.01	.02	…
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	
⋮				
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	

小数点第1桁

Φ (1.21)
=P (X≦1.21)
=0.8869

§4.5.5 正規分布(7)

- **正規分布の性質**
  - 正規分布にしたがう確率変数Xを線形変換したYもまた正規分布にしたがう。
  - X〜N(μ, σ²) であるとき、
    - X+b ~ N(μ+b, σ²)
    - aX ~ N(aμ, a²σ²)
    - aX+b ~ N(aμ+b, a²σ²)
  - またこのとき、 Y=(X−μ)/σとすると、Y〜N(0,1)。 標準化

§4.5.5 正規分布(8)

- **再生性**
  - 互いに独立な確率変数X, Zがあり、それぞれ X〜N(μ, σ²)、Z〜N(δ, ω²) であるとき、W=X+Zもまた正規分布にしたがい、 W〜N(μ+ δ, σ²+ω²) となる。

  この性質を正規分布の再生性という。

  再生性は正規分布の他、二項分布などにもある。

§4.5.6 正規分布の関連分布(1)

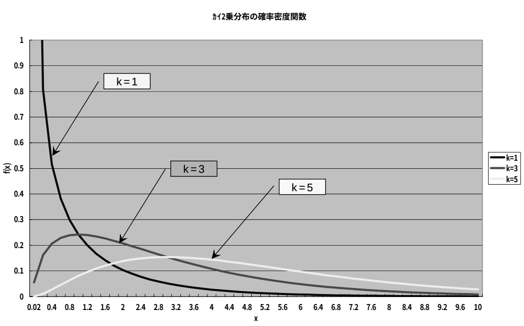
- **カイ2乗 (χ²) 分布** Chi-square distribution
  - X〜N(0, 1)であるときの X^2の確率分布。⟺ 自由度1のχ²分布
  - 互いに独立な $X_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ の2乗の和の確率分布

    自由度kのχ²分布 $\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi^2(k)$
  - 確率密度関数

    $$f(x)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}e^{-x/2}x^{k/2-1},\quad x\geq 0$$

    ガンマ関数：Γ(1/2)=√π，
    Γ(x)=(x-1)Γ(x-1) for x>0
  - 平均はk、分散は2k

§4.5.6 正規分布の関連分布(2)
カイ2乗分布の密度関数



§4.5.6 正規分布の関連分布(3)

- **t分布** t-distribution
  - X, Yは互いに独立な確率変数であり、

    X〜N(0, 1) 標準正規分布

    Y〜 χ²(k) 自由度kのχ²分布

    であるものとする。
  - このとき、XとY(の平方根) の比 $\dfrac{X}{\sqrt{Y/k}} \sim t(k)$

    は、自由度kのt分布に従う。
  - 確率密度関数

    $$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2},\quad k>0$$
  - 平均は0、分散はk/(k-2) (k>2のとき)
  - 自由度k→∞のとき、標準正規分布に収束